



# ÖLÇME SONUÇLARI ÜZERİNDE İSTATİSTİKSEL İŞLEMLER

## • 5. SUNUM

- Verilerin düzenlenmesi
- Verilerin gruplandırılması
- Merkezi eğilim ölçüleri
- Merkezi dağılım ölçüleri
- Standart puanlar

# Temel Kavramlar

## ► Veri nedir?

Bir öğrenci kümesine uygulanan bir sınavdan elde edilen puanların herhangi bir işlem yapılmamış haline ham veri denir (ham puanlar) denir.

## ► Değer nedir?

Bir veriyi (puanlar dizisini) oluşturan ölçümlerin her birine değer (puan) denir.

## ► Frekans nedir?

Frekans bir değere (puana) ait tekrar sayısıdır. Bir puanın kaç öğrenci tarafından alındığını belirten tekrar sayısına frekans denir.

# Değişken ve Türleri

- ▶ Bir durumdan diğerine farklılık gösteren özelliklere değişken denilir.
- ▶ Değişkenler gözlemden gözleme farklı değerler alabilir.
- ▶ Bir özellik her gözlemden aynı değeri alıyorsa, yani gözlemden gözleme değişmiyorsa bu duruma SABİT denir.
- ▶ Boy uzunluğu, cinsiyet, yaş, kilo vb. değişkenlere örnek olarak verilebilir. Değişkenler sayılarla ifade edilmesi yönünden, **nitel** ve **nicel**, aldıkları değere göre; **sürekli** ve **kesikli**, başka bir değişkene bağıllık derecesine göre; **bağımlı** ve **bağımsız**, olarak gruplara ayrılırlar.

# Verilerin Düzenlenmesi

- ▶ Verilerin Sıraya Dizilmesi
- ▶ Frekans Tablosu
- ▶ Grafikler
- ▶ Çubuk Grafiği (Bar Grafik)
- ▶ Histogram Grafiği
- ▶ Çizgi Grafiği

# Ham Veri

Hiçbir şekilde işlenmemiş üzerinde herhangi bir işlem yapılmamış puanlardan oluşan veriye ham veri denir.

| ÖĞRENCİ | PUAN | ÖĞRENCİ | PUAN | ÖĞRENCİ | PUAN |
|---------|------|---------|------|---------|------|
| AHMET   | 42   | FATMA   | 97   | NURCAN  | 98   |
| AHMET   | 81   | GÜLLÜ   | 86   | ÖMER    | 88   |
| AYBERK  | 61   | HACER   | 98   | RAHİME  | 93   |
| AYŞE    | 93   | HASAN   | 75   | SAİT    | 36   |
| AYŞEGÜL | 84   | HAZARE  | 79   | SALİH   | 69   |
| BEDİA   | 80   | İMRAN   | 88   | SEDAT   | 71   |
| BETÜL   | 84   | KEMAL   | 79   | SONGÜL  | 86   |
| BÜŞRA   | 93   | KÜBRA   | 93   | TUBA    | 93   |
| CUMA    | 81   | MEDİNE  | 79   | TUBA    | 95   |
| ELİF    | 87   | MEHMET  | 52   | ÜMRAN   | 87   |
| ESMA    | 86   | MEHMET  | 69   | YASEMİN | 73   |
| FATMA   | 91   | MEHMET  | 84   | ZEYNEP  | 77   |
| FATMA   | 93   | MERVE   | 85   | ZEYNEP  | 86   |

# Verilerin Sıraya Dizilmesi

- ▶ Verilerin düzenlenmesi, puanların büyükten küçüğe ya da küçükten büyüğe doğru sıralanması yoluyla yapılır.
- ▶ Puanlar sıralandıktan sonra puan dizisinin üst ve alt sınırları rahatça belirlenir.
- ▶ Puanlar 36 ile 98 arasında değişiklik göstermekte ve bazı puanlar birden fazla gözlenmektedir.

| ÖĞRENCİ | PUAN | ÖĞRENCİ | PUAN | ÖĞRENCİ | PUAN |
|---------|------|---------|------|---------|------|
| SAİT    | 36   | BEDİA   | 80   | ÖMER    | 88   |
| AHMET   | 42   | AHMET   | 81   | İMRAN   | 88   |
| MEHMET  | 52   | CUMA    | 81   | FATMA   | 91   |
| AYBERK  | 61   | MEHMET  | 84   | KÜBRA   | 93   |
| MEHMET  | 69   | BETÜL   | 84   | TUBA    | 93   |
| SALİH   | 69   | AYŞEGÜL | 84   | AYŞE    | 93   |
| SEDAT   | 71   | MERVE   | 85   | RAHİME  | 93   |
| YASEMİN | 73   | ESMA    | 86   | FATMA   | 93   |
| HASAN   | 75   | GÜLLÜ   | 86   | BÜŞRA   | 93   |
| ZEYNEP  | 77   | ZEYNEP  | 86   | TUBA    | 95   |
| KEMAL   | 79   | SONGÜL  | 86   | FATMA   | 97   |
| HAZARE  | 79   | ELİF    | 87   | HACER   | 98   |
| MEDİNE  | 79   | ÜMRAN   | 87   | NURCAN  | 98   |

# Verilerin Tablolaştırılması (Frekans Tablosu)

| Puanlar | Frekan<br>s | Toplamlı<br>Frekans | Yüzde | Toplamlı<br>Yüzde |
|---------|-------------|---------------------|-------|-------------------|
| 36      | 1           | 1                   | 2.56  | 2.56              |
| 42      | 1           | 2                   | 2.56  | 5.12              |
| 52      | 1           | 3                   | 2.56  | 7.69              |
| 61      | 1           | 4                   | 2.56  | 10.25             |
| 69      | 2           | 6                   | 5.13  | 15.38             |
| 71      | 1           | 7                   | 2.56  | 17.94             |
| 73      | 1           | 8                   | 2.56  | 20.51             |
| 75      | 1           | 9                   | 2.56  | 23.07             |
| 77      | 1           | 10                  | 2.56  | 25.64             |
| 79      | 3           | 13                  | 7.69  | 33.33             |
| 80      | 1           | 14                  | 2.56  | 35.89             |
| 81      | 2           | 16                  | 5.13  | 41.02             |
| 84      | 3           | 19                  | 7.69  | 48.71             |
| 85      | 1           | 20                  | 2.56  | 51.28             |
| 86      | 4           | 24                  | 10.26 | 61.53             |
| 87      | 2           | 26                  | 5.13  | 66.66             |
| 88      | 2           | 28                  | 5.13  | 71.79             |
| 91      | 1           | 29                  | 2.56  | 74.35             |
| 93      | 6           | 35                  | 15.38 | 89.74             |
| 95      | 1           | 36                  | 2.56  | 92.30             |
| 97      | 1           | 37                  | 2.56  | 94.87             |
| 98      | 2           | 39                  | 5.13  | 100.00            |

Toplamlı frekansın en altındaki değer sınıf mevcudunu verir. Bu veriye göre sınıf mevcudu 39'dur.

# Verilerin Gruplandırılması

- ▶ Frekans tablosunda hem puanlar sıralanır, hem de puandan kaç tane olduğu sayılarak frekanslar bulunur. Ancak hem puan dağılımının hem genel durumu daha iyi görebilmek hem de hesaplamaları kolaylaştırmak için verilerin gruplandırılması gerekmektedir.
- ▶ Verileri gruplandırırken öncelikle grup sayısı saptanır. Grup sayısının puan dağılımının gerçek özelliklerinin kaybolmaması için küçük seçilmemesine ve hesaplama işlemlerinin kolaylığı için büyük seçilmemesine dikkat edilmelidir. Ayrıca grup sayısının tek olması, puan dağılımında simetri sağladığı için, puanların 7,9,11 ve 13 gibi tek sayıda gruba ayrılması tavsiye edilir.



# Verilerin Gruplandırılması

Puan  
Dağılımını  
7 gruba  
ayırmak  
istiyoruz

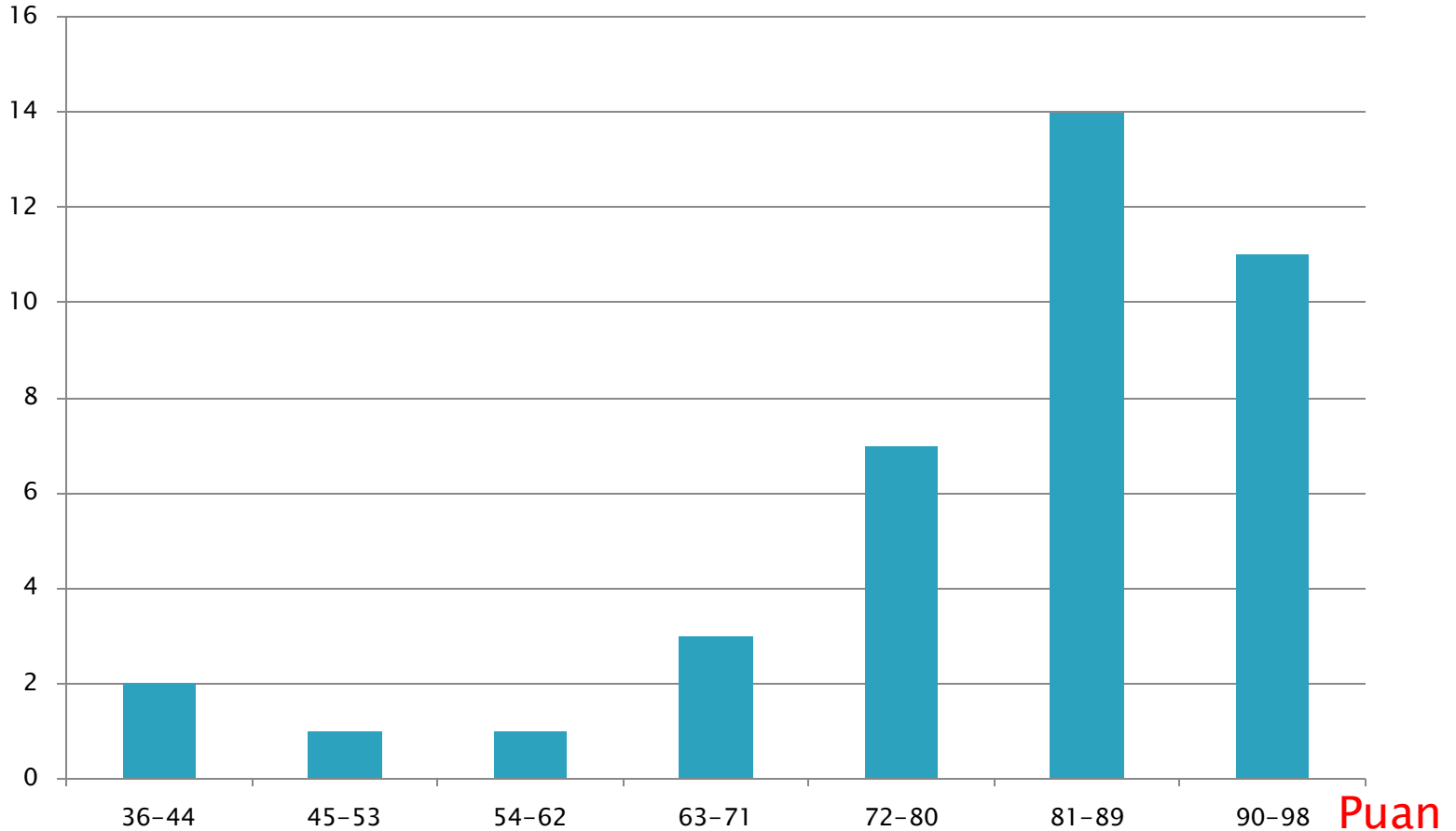
| Puan Aralığı | Çetele     | Frekans | Toplamlı Frekans |
|--------------|------------|---------|------------------|
| 36-44        | //         | 2       | 2                |
| 45-53        | /          | 1       | 3                |
| 54-62        | /          | 1       | 4                |
| 63-71        | ///        | 3       | 7                |
| 72-80        | //////     | 7       | 14               |
| 81-89        | ////////// | 14      | 28               |
| 90-98        | ////////// | 11      | 39               |

**(98-36)/7=8.9 aralık genişliği olarak hesaplanır.**

$$a = \frac{X_{EB} - X_{EK}}{GRUP SAYISI}$$

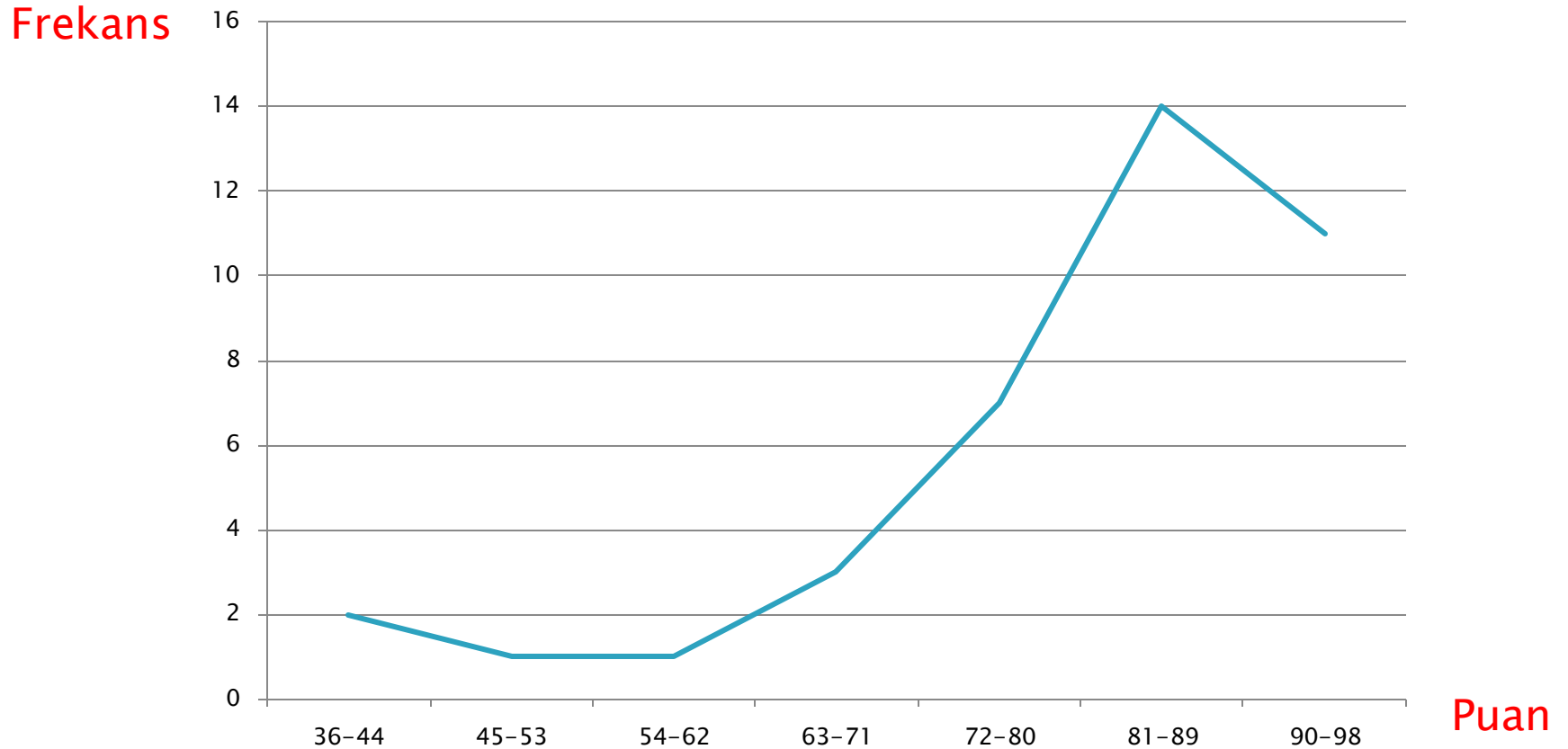
# Bar (Çubuk) Grafiği İle gösterme

Frekans



39 öğrencinin ölçme ara sınavından aldığı puanların  
gruplandırılmış halini gösteren **bar grafiği**

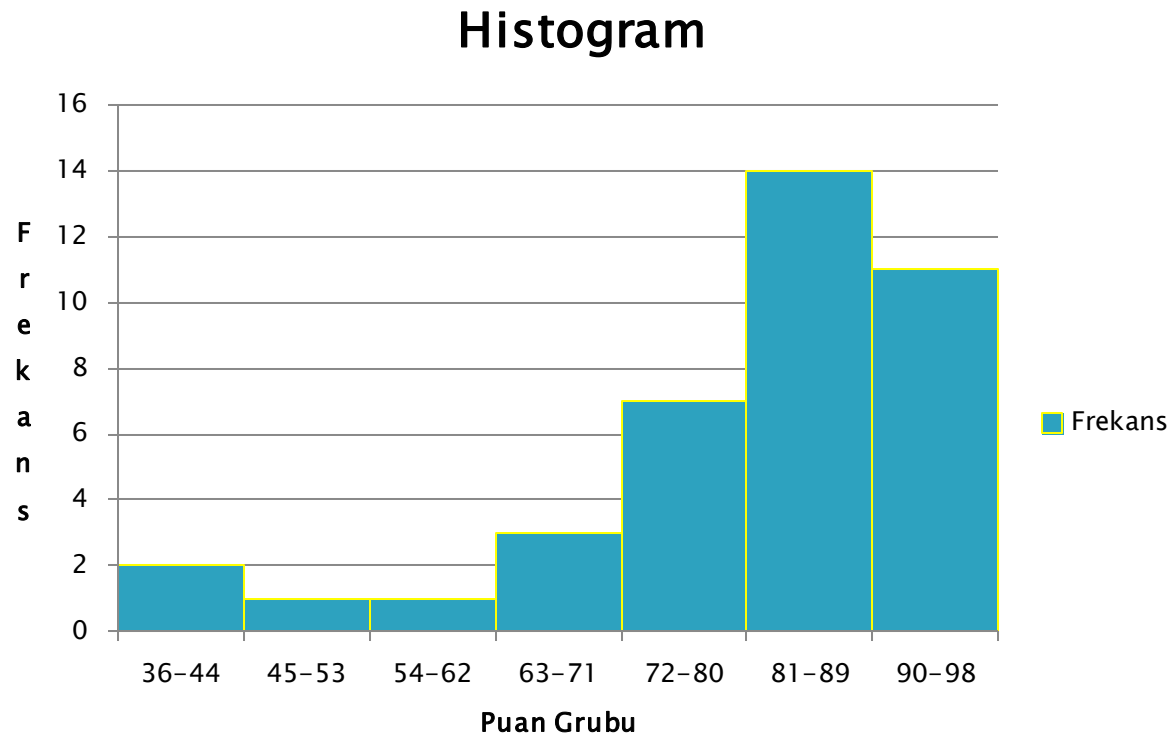
# Çizgi Grafiği İle Gösterme



39 öğrencinin ölçme ara sınavından aldığı puanların gruplandırılmış halini gösteren çizgi grafiği

# Histogram ile Gösterme

- Bu da aynı verinin **histogram grafiği** ile gösterilmesi.



# Soru

- ▶ *Bar (çubuk) grafiği ile histogram arasındaki fark nedir?*

# Basit İstatistiksel İşlemler

Genel olarak test istatistikleri

- ▶ Merkezi Eğilim (Yığılma) Ölçüleri
- ▶ Merkezi Dağılım (Yayılmaya) Ölçüleri

olmak üzere 2 grupta incelenebilir.

# Merkezi Eğilim (Yığılma) Ölçüleri

- ▶ Merkezi Eğilim Ölçüleri, belli bir özelliğe ya da değişkene ilişkin ölçme sonuçlarının, ***hangi değer etrafında toplandığını*** gösteren ve veri grubunu özetleyen ölçülerdir.

## Merkezi eğilim ölçüleri:

- ▶ Mod (Tepe Değeri)
- ▶ Aritmetik Ortalama
- ▶ Medyan (Ortanca)
- ▶ Ağırlıklı Ortalama

# Mod (Tepe Değer)

- ▶ Bir veri grubunda en çok tekrar eden ölçme sonucuna (puana) mod denir. Yani en fazla frekansa sahip değer olarak tanımlanır.
- ▶ Mod, verilerin en çok tekrar eden değer etrafında toplandığını ifade eden bir ölçüdür. Veri grubunu betimlemede, tüm verilerden ziyade en çok tekrar eden verinin kullanılmasından dolayı mod, diğer merkezi eğilim ölçülerine kıyasla veri hakkında en az bilgi veren ölçüdür.
- ▶ Hiçbir aritmetik işlem gerektirmez.
- ▶ Örnek:
- ▶ 1, 2, 7, 5, 6, 4, 4, 4, 3, 2, 1, 7, 8, 10, 9, 2, 2, 4, 4
- ▶ Bu verideki sayılar arasında 4 sayısı en çok tekrarlanan (5 defa) sayıdır. Dolayısıyla bu verinin  $\text{modu}=4$ 'tür.



# Mod (Tepe Değer)

- ▶ Bazı durumlarda, en yüksek frekansa sahip değer iki veya daha fazla sayıda olabilir. Bu durumda dağılımın tek tepe değeri olmaz. Dağılım iki veya daha fazla tepe değere sahiptir.
- ▶ Öğrencilerin matematik sınavından aldığı puanlar:
- ▶ 45, 55, 50, 60, 60, 60, 45, 35, 45, 75 ve 50 olsun.
- ▶ 45 ve 60 puanlarının her ikisi de aynı ve en yüksek frekansa sahiptir. Bu durumda dağılım tek değil çift tepe değerlidir.

# Mod (Tepe Değer)

- ▶ Bir dağılımın birden fazla tepe değere sahip olması verilerin hangi değer etrafında yığıldığı hakkında sağlıklı bilgi vermez. Grubun homojen değil heterojen bir yapıya sahip olduğunu gösterir.
- ▶ Bazı durumlarda da verideki değerlerin hepsi aynı sayıda gözlenir. Bu durumda tepe değer yoktur denilir.
- ▶ 50, 60,70, 80 verisinde tepe değer yoktur.
- ▶ Önceki slaytlarda vermiş olduğumuz verinin modu 93'tür

# Tepe Değerin Özellikleri

- ▶ Tepe değer bulunurken sadece en çok tekrarlayan ölçme sonucu alındığından tepe değer kaba ve kullanışsızdır.
- ▶ Hesaplaması çok kolaydır.
- ▶ Nitel veriler ve sınıflama düzeyindeki ölçme sonuçları üzerinde uygulanabilecek tek merkezi eğilim ölçüsüdür.
- ▶ Veri grubundaki en ufak değişiklik tepe değer beklenmedik şekilde değişmesine yol açtığı için tepe değer küçük değişikliklere duyarlıdır ve bu yüzden kullanışsızdır.

# Frekans Tablosunda Mod

| Puan | Frekans |
|------|---------|
| 50   | 11      |
| 60   | 12      |
| 70   | 19      |
| 80   | 15      |
| 90   | 16      |

- Frekans tablosunda mod değerini bulmak için frekans değeri en yüksek olan puana bakarız. Frekans değeri en yüksek olan yani en çok tekrar eden puan mod olarak alınır. Yandaki tabloda mod değeri 70'tir.

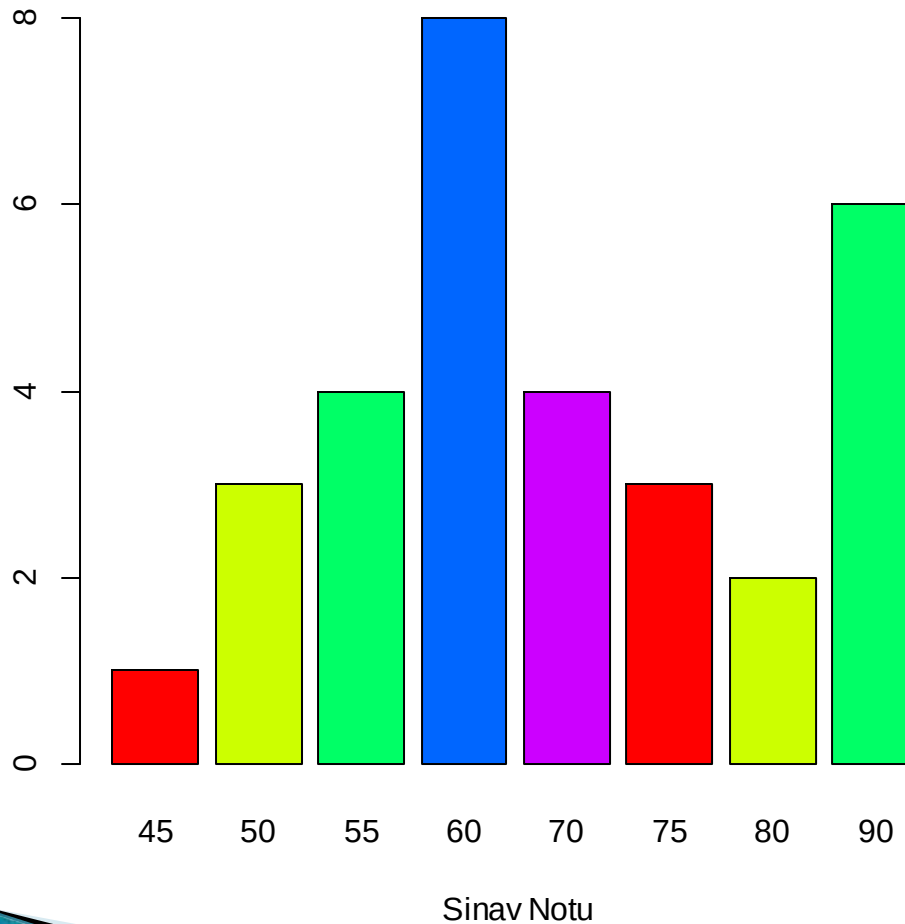
# Gruplandırılmış Verilerde Mod

| PUAN ARALIĞI (X) | Frekans (f) |
|------------------|-------------|
| 90-98            | 5           |
| 81-89            | 6           |
| 72-80            | 7           |
| 63-71            | 6           |
| 54-62            | 5           |
| 45-53            | 4           |

**Gruplandırılmış verilerde modu bulmak için frekansı en yüksek olan puan aralığına bakılır ve bu puan aralığının orta noktası verinin modu olarak alınır.**

Yukarıdaki tabloda verilen verinin modu 72-80 puan aralığının en orta noktasında bulunan **76**'dır

# Grafiklerde Mod

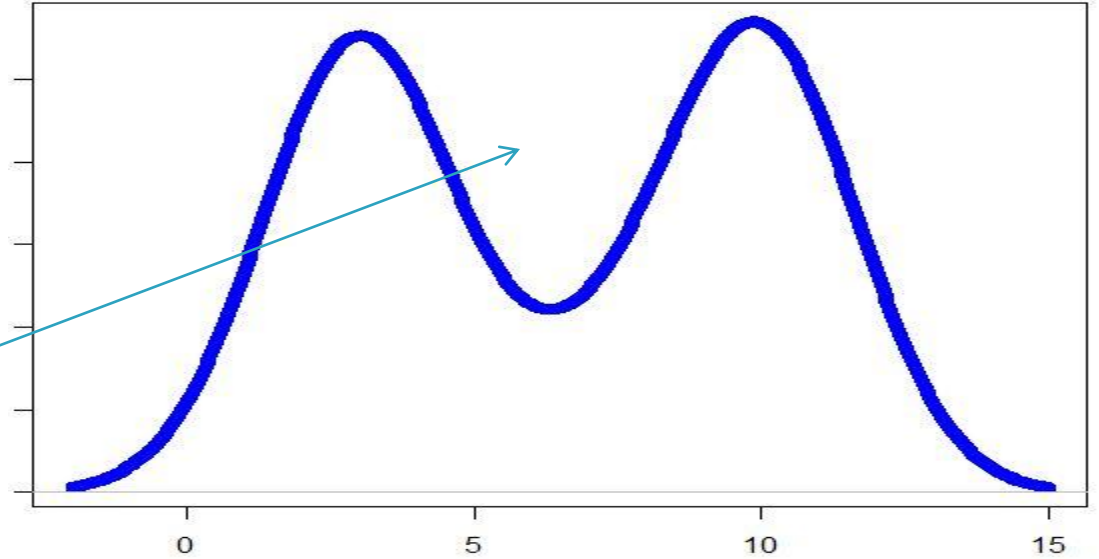


- Yandaki grafikte en çok alınan sınav puanı kaçtır?
- Yani bu sınıfın modu kaçtır?

## Örnek 1

| Puan | Frekans |
|------|---------|
| 3    | 10      |
| 7    | 2       |
| 10   | 10      |

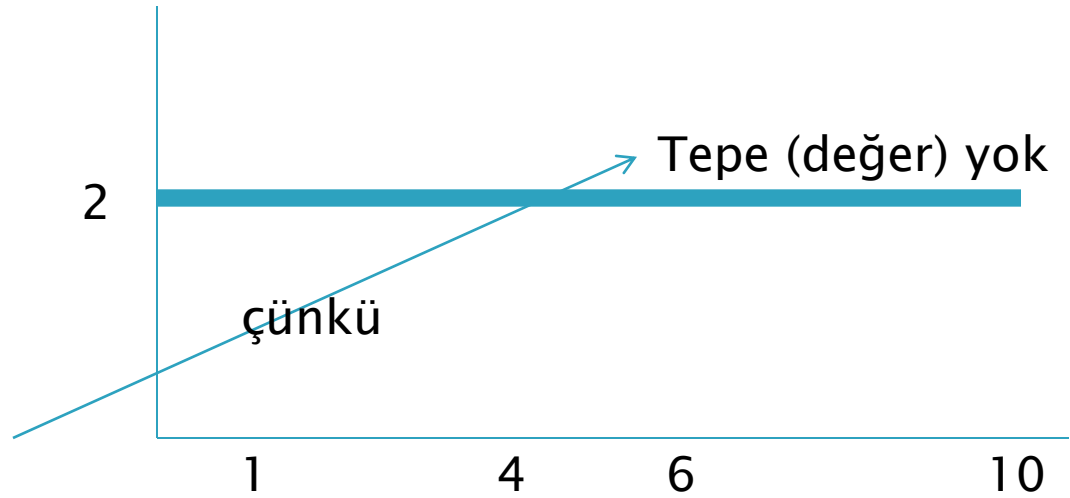
Çift modlu



## Örnek 2

| Puan | Frekans |
|------|---------|
| 10   | 2       |
| 6    | 2       |
| 1    | 2       |
| 4    | 2       |

Mod hesaplanamaz



# Mod Örnek

| Puanlar | Frekans |
|---------|---------|
| 98      | 4       |
| 94      | 8       |
| 90      | 6       |
| 86      | 7       |
| 82      | 5       |

Mod = ?

Mod = ?

| Puanlar | Frekans |
|---------|---------|
| 92      | 3       |
| 91      | 5       |
| 90      | 9       |
| 89      | 7       |
| 88      | 15      |



# Ortanca (Medyan)

- ▶ Sıralanmış bir veri grubunu tam ortadan ikiye ayıran noktaya rastlayan ölçme sonucuna **ortanca** denir.
- ▶ Ortancanın sırası (yeri) gruplandırılmış ve sıralanmış verilerde  $(N+1)/2$  formülüyle hesaplanır. Bulunan sayı ortancanın en düşük sayıdan uzaklığını verir.

Veri sayısının tek olması durumunda:

- ▶ 1, 4, 5, **6**, 7, 8, 11 şeklinde sıralı halde verilmiş olan puan dağılımının ortancası,  $(7+1)/2=4$  yani 4. sıradaki sayıdır. Bu puanların tam orta noktasına rastlayan ölçme sonucu olan 6'dır.

Veri sayısının çift olması durumunda:

- ▶ 11, 12, 13, 13, 16, **17, 18**, 19, 21, 22, 23, 24 şeklinde sıralı halde verilmiş olan puan dağılımının ortancası en ortadaki iki sayının ortalamasıdır  $(17+18)/2 = 17.5$ 'tir.
- ▶ Önceki slaytlarda vermiş olduğumuz verinin ortancası 85'tir.

# Ortanca

1, 4, 5, 6, 7, 8, 11



11, 12, 13, 13, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24



17,5

Ortanca sıralanmış veriyi tam ortadan ikiye bölen sayı(lar) ile bulunur.

# Aritmetik Ortalama $\bar{X}$

- ▶ En çok kullanılan merkezi yığılma ölçüsüdür.
- ▶ Aritmetik ortalama, verideki puanların toplamının verideki eleman sayısına bölünmesiyle bulunur.

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_N}{N}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

$\bar{X}$ : Aritmetik Ortalama

$\sum X$ : Verilerin Toplamı

$N$ : Veri sayısı

# Aritmetik Ortalama Örnek

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots X_N}{N}$$

**10, 20, 30, 30, 40 dağılımına sahip olan bir veri için aritmetik ortalama hesaplaması aşağıdaki gibidir.**

$$\bar{X} = \frac{10 + 20 + 30 + 30 + 40}{5} = 26$$

Önceki slaytlarda vermiş olduğumuz 39 kişilik verinin ortalaması 81.33'tür.

# Frekans Tablosunda Aritm. Ortalama

| X  | f |
|----|---|
| 60 | 1 |
| 59 | 3 |
| 57 | 1 |
| 56 | 3 |
| 55 | 1 |
| 54 | 4 |
| 53 | 2 |
| 52 | 2 |
| 51 | 2 |
| 50 | 1 |
| 49 | 3 |
| 48 | 2 |
| 47 | 2 |
| 46 | 1 |

Yandaki tabloda verilen  
ve 46 ile 60 arasında  
değişen puanların  
aritmetik ortalaması  
kaçtır?

# Frekans Tablosunda Aritm. Ortalama

| X  | f | fX  |
|----|---|-----|
| 60 | 1 | 60  |
| 59 | 3 | 177 |
| 57 | 1 | 57  |
| 56 | 3 | 168 |
| 55 | 1 | 55  |
| 54 | 4 | 216 |
| 53 | 2 | 106 |
| 52 | 2 | 104 |
| 51 | 2 | 102 |
| 50 | 1 | 50  |
| 49 | 3 | 147 |
| 48 | 2 | 96  |
| 47 | 2 | 94  |
| 46 | 1 | 46  |

İlk önce hangi puandan kaç tane varsa puanın değeri ile yanındaki frekansı çarparak ( $fx$ ) toplam puan değerlerini bulmaya çalışırız.

# Frekans Tablosunda Aritm. Ortalama

| X             | f         | fX          |
|---------------|-----------|-------------|
| 60            | 1         | 60          |
| 59            | 3         | 177         |
| 57            | 1         | 57          |
| 56            | 3         | 168         |
| 55            | 1         | 55          |
| 54            | 4         | 216         |
| 53            | 2         | 106         |
| 52            | 2         | 104         |
| 51            | 2         | 102         |
| 50            | 1         | 50          |
| 49            | 3         | 147         |
| 48            | 2         | 96          |
| 47            | 2         | 94          |
| 46            | 1         | 46          |
| <b>Toplam</b> | <b>28</b> | <b>1478</b> |

$$\bar{X} = \frac{1478}{28} = 52.78$$

# Gruplandırılmış Verilerde Aritmetik Ortalama

| X     | $f$ |
|-------|-----|
| 35-39 | 3   |
| 40-44 | 5   |
| 45-49 | 8   |
| 50-54 | 11  |
| 55-59 | 8   |
| 60-64 | 5   |
| 65-69 | 5   |

Yandaki tabloda verilen gruplandırılmış verinin aritmetik ortalaması kaçtır?



# Gruplandırılmış Verilerde Aritmetik Ortalama

| X             | f         | $X_o$ | $f * X_o$   |
|---------------|-----------|-------|-------------|
| 35-39         | 3         | 37    | 111         |
| 40-44         | 5         | 42    | 210         |
| 45-49         | 8         | 47    | 376         |
| 50-54         | 11        | 52    | 572         |
| 55-59         | 8         | 57    | 456         |
| 60-64         | 5         | 62    | 310         |
| 65-69         | 5         | 67    | 335         |
| <b>Toplam</b> | <b>45</b> |       | <b>2370</b> |

Burada her bir puan grubu için o grubu temsil eden **ortanca** ( $X_o$ ) değeri alınır ve frekans ile çarpılır. Örneğin 35-49 puan aralığı için ortanca değer 37 olduğu için ve bu puan aralığında puan alan 3 öğrenci olduğu için 37'yi 3 ile çarparız.

$$\bar{X} = \frac{2370}{45} = 52.66$$

# Ağırlıklı Ortalama

- ▶ Birden çok veri kümesinin bulunduğu durumlarda, bunların farklı katsayılarla ağırlıklandırılması gerekir.
- ▶ Örneğin, bir yarıyılıda herhangi bir dersten yapılan ölçme işlemlerinin farklı katsayılarla çarpıldıktan sonra ortalamalarının hesaplanması gerekir. Bu şekilde hesaplanan ortalama ağırlıklı ortalama denir.

$$\bar{X} = \frac{a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + \cdots a_nX_N}{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N}$$

$\bar{X}$ : Ağırlıklı Ortalama

$a_nX_N$ : Her bir verinin kendi ağırlıklandırma katsayısı ile çarpımının toplamı

$a_N$ : Ağırlıklandırma katsayısı toplamı

# Ağırlıklı Ortalama Örnek

- ▶ Örneğin, ikinci yarıyılıda aldığı fizik dersindeki yazılı, sözlü ve ödev notları sırasıyla 7, 9, 8 olan bir öğrencinin fizik dersi ağırlıklı not ortalaması, yazılı, sözlü ve ödev notlarına verilmek istenen ağırlığa bağlıdır.
- ▶ Sırasıyla bu notlara verilmek istenen ağırlık %50, %30 ve %20 şeklinde belirlenmişse, o derse ilişkin öğrencinin ağırlıklı not ortalaması şu şekilde hesaplanır:

$$\bar{X} = \frac{50 * 7 + 30 * 9 + 20 * 8}{50 + 30 + 20} = 7.8$$

# Ağırlıklı Ortalama Örnek

| Ders          | Kredi | Not |
|---------------|-------|-----|
| Fizik         | 3     | 4   |
| Kimya         | 3     | 4   |
| Biyoloji      | 3     | 5   |
| Matematik     | 3     | 5   |
| Resim         | 1     | 5   |
| Müzik         | 1     | 5   |
| Beden Eğitimi | 1     | 4   |
| Türkçe        | 3     | 3   |

Yan tarafta bir öğrencinin farklı kredilere sahip derslerden aldıkları notlar verilmiştir. Bu derslerin ağırlıklı ortalaması kaçtır?

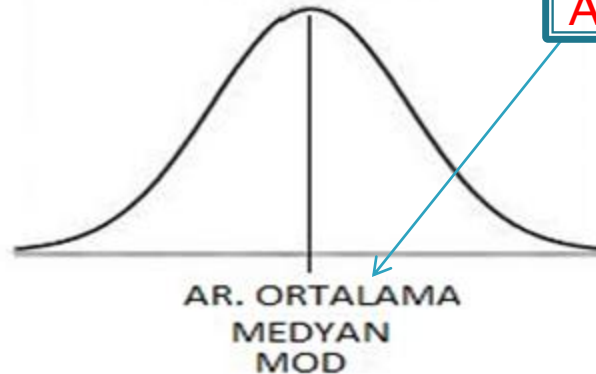
# Ağırlıklı Ortalama Örnek

| Ders          | Kredi     | Not       | Puan*Kredi |
|---------------|-----------|-----------|------------|
| Fizik         | 3         | 4         | 12         |
| Kimya         | 3         | 4         | 12         |
| Biyoloji      | 3         | 5         | 15         |
| Matematik     | 3         | 5         | 15         |
| Resim         | 1         | 5         | 5          |
| Müzik         | 1         | 5         | 5          |
| Beden Eğitimi | 1         | 4         | 4          |
| Türkçe        | 3         | 3         | 9          |
| <b>Toplam</b> | <b>18</b> | <b>35</b> | <b>77</b>  |

**Ağırlıklı ortalama=77/18= 4.28**

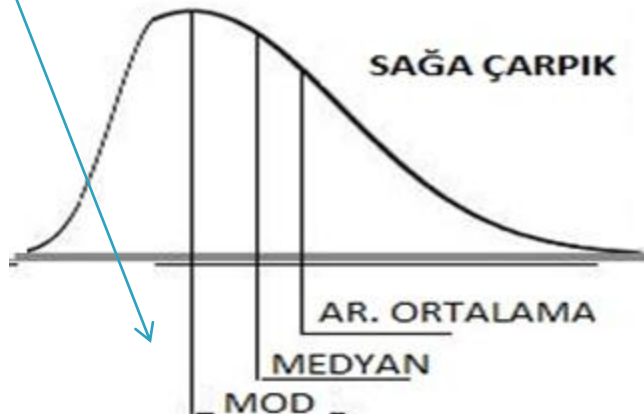
# Karşıımıza Çıkabilecek 3 Tipik Dağılım (mod-medyan-ortalama durumlarına göre)

SIMETRİK

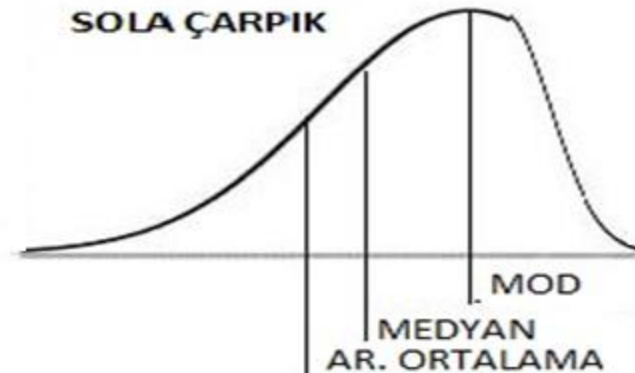


$\text{Ar. Ortalama} = \text{Medyan} = \text{Mod}$

$\text{Ar. Ortalama} > \text{Medyan} > \text{Mod}$



SOLA ÇARPIK



$\text{Ar. Ortalama} < \text{Medyan} < \text{Mod}$

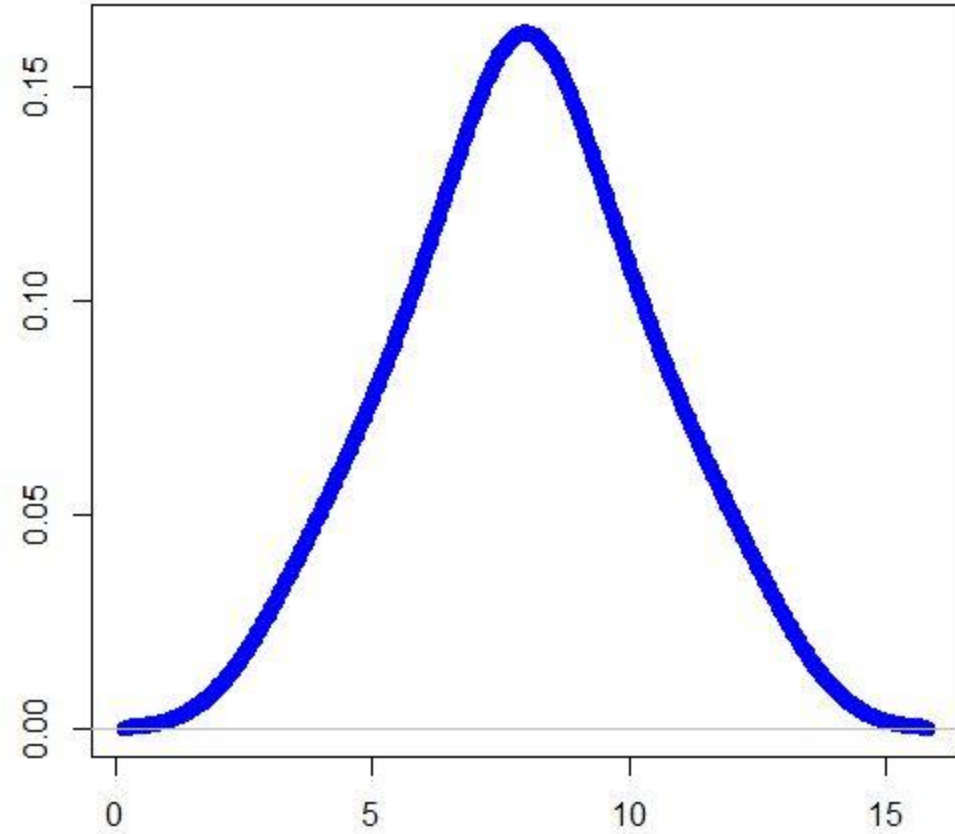
### Örnek 3

| Puan | Frekans |
|------|---------|
| 4    | 1       |
| 6    | 2       |
| 8    | 4       |
| 10   | 2       |
| 12   | 1       |

Aritmetik ortalama= ?

Medyan= ?

Mod=?

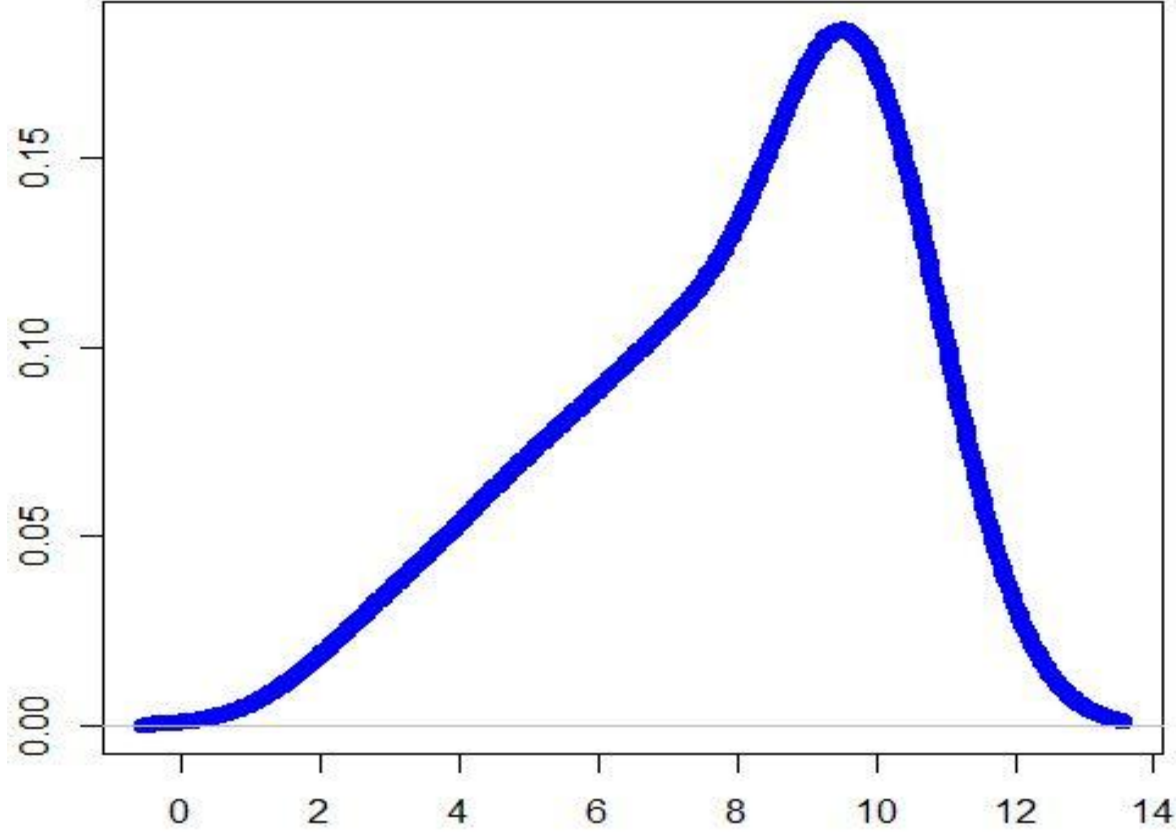


**Normal Dağılım**

## Örnek 4

| Puan | Frekans |
|------|---------|
| 3    | 1       |
| 5    | 2       |
| 7    | 3       |
| 9    | 4       |
| 10   | 5       |

Aritmetik ortalama=?  
Medyan=?  
Mod=?



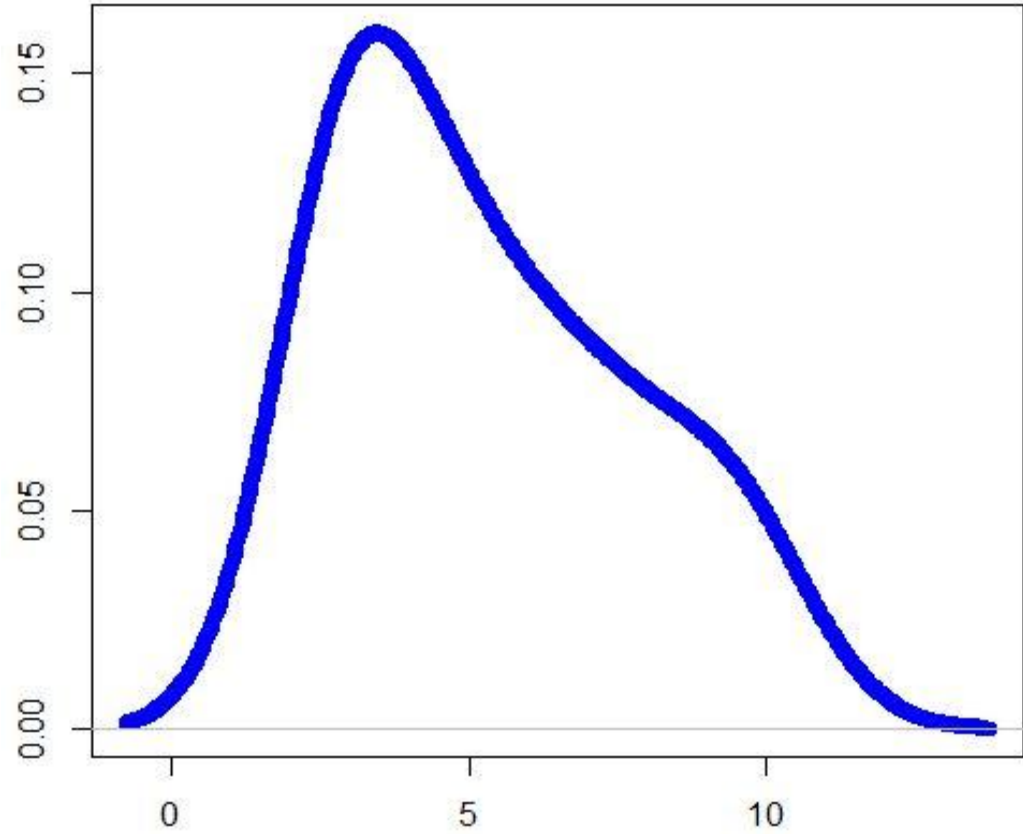
**Sola Çarpık**



## Örnek 5

| Puan | Frekans |
|------|---------|
| 3    | 7       |
| 5    | 4       |
| 7    | 3       |
| 9    | 2       |
| 10   | 1       |

Aritmetik ortalama= ?  
Medyan= ?  
Mod=?



**Sağa Çarpık**

# Merkezi Dağılım Ölçüleri

- ▶ Ranj
- ▶ Çeyrek Kayma
- ▶ Çeyrekler Arası Açıklık
- ▶ Standart Sapma
- ▶ Varyans

# Ranj (Genişlik–Aralık)

- ▶ Bir veri grubunda bulunan **en büyük** veri ile **en küçük** veri arasındaki farktır.
- ▶ **Ranj = maksimum puan – minimum puan**
- ▶ Eğer bir sınavda en yüksek puan 90 ve en düşük puan 50 ise ranj değeri 40'a eşittir. Buna göre bu sınavın puanları 40 puanlık bir aralığa dağılmaktadır.
- ▶ ***Ranjin büyük olması sınavın ayırt ediciliğinin yüksek olduğu anlamına gelir.***
- ▶ Ayırt edici, dolayısıyla geçerliği ve güvenirliği yüksek bir sınavda hesaplanan ranj, o sınavdan elde edilmesi mümkün en yüksek puanın yarısına yakın olmalıdır.

# Ranj

- ▶ Ranj sadece maksimum ve minimum değerlerden etkilenir aradaki diğer ölçümlerin ranj üzerinde hiç bir etkisi yoktur. Aşağıdaki 2 veri çok farklı olmasına rağmen aynı ranj değerine sahiptir.
- ▶ Ranj1: 10, 20, 20, 20, 20, 20, 30
- ▶ Ranj2: 10, 21, 22, 23, 24, 25, 30  
 $\text{Ranj1} = \text{Ranj2} = 30 - 10 = 20$
- ▶ Ranj da mod (merkezi eğilim ölçüsü) gibi kaba ve az bilgi verir.

# Gruplandırılmış Verilerde Ranj

- ▶ Gruplandırılmış verilerde ranj değeri bulunurken en yüksek ve en düşük puan aralıklarının orta noktaları alınır ve bunlar arasında çıkarma işlemi yapılır. Yan taraftaki veri için 35–39 puan aralığının orta noktası olan 37 değeri ile 65–69 puan aralığının orta noktası olan 67 değeri arasındaki fark ranji verir. Yani  $\text{ranj} = 30$ .

| X     | f  |
|-------|----|
| 35–39 | 3  |
| 40–44 | 5  |
| 45–49 | 8  |
| 50–54 | 11 |
| 55–59 | 8  |
| 60–64 | 5  |
| 65–69 | 5  |

# Çeyrekler Arası Açıklık

- ▶ Çeyrek sapma, birinci ve üçüncü çeyreğin farkıdır.
- ▶ Üçüncü çeyrek (%75) ile birinci çeyrek (%25) arasında kalan yüzde 50'lik kısma tekabül eder.
- ▶ Örnek: 1, 2, 7, 8, 10, 5, 4, 3, 9, 8, 6 verisi için çeyrekler arası açıklığı bulalım. Önce veriyi sıraya koyalım:
  - ▶ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 9, 10
  - ▶ Ortanca=6
  - ▶ Alt çeyrek 1,2,3,4,5 verisinin orta noktası olan 3'tür
  - ▶ Üst çeyrek 7,8,8,9,10 verisinin orta noktası olan 8'dir.
  - ▶ Çeyrekler arası açıklık:  $8-3=5$ 'tir.

# Çeyrek Kayma (Sapma)

Ölçme sonuçlarına ilişkin dağılımın normal olmadığı durumlarda ve merkezi eğilim ölçüsü olarak ortanca kullanıldığı durumlarda, yayılma ölçüsü olarak çeyrek sapma kullanılır.

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} \text{ VEYA } Q = \frac{Y_{75} - Y_{25}}{2}$$

Çeyrek sapma, birinci ve üçüncü çeyreğin farkının yarısı, diğer bir ifadeyle, 75. yüzdellikler 25. yüzdeliğin farkının yarısıdır ve “Q” sembolü ile gösterilir.

# Standart Sapma

- Dağılım (yayılım) ölçüleri arasında en çok kullanılan standart sapma, bir veri grubundaki verilerin aritmetik ortalamadan ne derece uzaklara yayıldıklarını puan biriminde gösteren bir ortalama dır.

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n - 1}}$$

$S$  :Örnekleme de hesaplanmış standart sapma

$\bar{X}$  :Örneklemin aritmetik ortalaması

$(X_i - \bar{X})$  :Her ölçümün aritmetik ortalamadan olan farkı

$n$  :Veri sayısı



# Standart Sapma

| Öğrenci | Puan |
|---------|------|
| Metin   | 10   |
| Ali     | 20   |
| Feyyaz  | 30   |

**1. adım:** Standart sapmayı hesaplamak için önce aritmetik ortalamayı hesaplamamız gereklidir. Bu tablodaki verilerin aritmetik ortalaması  $(10+20+30)/3=20$ 'dir.

# Standart Sapma

**2. Adım** her bir değerden aritmetik ortalamayı çıkarmak.

| Öğrenci | Puan | Farklar |
|---------|------|---------|
| Metin   | 10   | 10-20   |
| Ali     | 20   | 20-20   |
| Feyyaz  | 30   | 30-20   |

Hesaplanmış hali:

| Öğrenci | Puan | Farklar |
|---------|------|---------|
| Metin   | 10   | -10     |
| Ali     | 20   | 0       |
| Feyyaz  | 30   | 10      |

# Standart Sapma

**3. Adım** her bir değer için hesaplanan farkların karesini almak.  
Yani farkı kendisiyle çarparsak karesini elde etmiş oluruz.

| Öğrenci | Puan | Farklar       |
|---------|------|---------------|
| Metin   | 10   | $(-10)*-(10)$ |
| Ali     | 20   | $0*0$         |
| Feyyaz  | 30   | $10*10$       |

**4. adım:** Karelerin toplamını hesaplamak.

| Öğrenci    | Puan | Farklar |
|------------|------|---------|
| Metin      | 10   | 100     |
| Ali        | 20   | 0       |
| Feyyaz     | 30   | 100     |
| Toplam=200 |      |         |

Bu değer standart sapma formülünde pay kısmına yazılacak.

# Cözüm

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n - 1}}$$

$S$  :Örnekleme hesaplanmış standart sapma

$\bar{X}$  :Örneklemin aritmetik ortalaması

$(X_i - \bar{X})$  :Her ölçümün aritmetik ortalamadan olan farkı

$n$  :Veri sayısı

Cevap:

$$S = \sqrt{\frac{200}{3 - 1}} = \sqrt{100} = 10$$

Buraya bir önceki slaytta bulunan değer yazılır

Buraya veri sayısının 1 eksiği yazılır

# Frekans Tablosunda St. Sapma Hesabı

| Puanlar | f  |
|---------|----|
| 40      | 3  |
| 45      | 4  |
| 55      | 6  |
| 60      | 10 |
| 70      | 6  |
| 75      | 8  |
| 80      | 3  |
| 85      | 3  |
| 90      | 2  |

Yanda puanları ve frekansları verilen bir verinin standart sapması kaçtır?

Öncelikle aritmetik ortalama bulunur (65) daha sonra her puandan aritmetik ortalama çıkarılarak puanların aritmetik ortalamadan uzaklıkları bulunur. Daha sonra bu uzaklıkların kareleri alınır ve frekans sayısı ile bu karesi alınan değerler çarpılır. Sonra her puan için hesaplanan bu değerler birlikte toplanır. En son olarak bu değer formülde yerine konularak standart sapma değeri hesaplanır.

# Frekans Tablosunda St. Sapma Hesabı

| Puanlar       | f         | farklar | Farkların karesi | f*farkların karesi |
|---------------|-----------|---------|------------------|--------------------|
| 40            | 3         | -25     | 625 (3 ile çarp) | 1825               |
| 45            | 4         | -20     | 400 (4 ile çarp) | 1600               |
| 55            | 6         | -10     | 100 (6 ile çarp) | 600                |
| 60            | 10        | -5      | 25 (10 ile çarp) | 250                |
| 70            | 6         | 5       | 25               | 150                |
| 75            | 8         | 10      | 100              | 800                |
| 80            | 3         | 15      | 225              | 675                |
| 85            | 3         | 20      | 400              | 1200               |
| 90            | 2         | 25      | 625              | 1250               |
| <b>Toplam</b> | <b>45</b> |         |                  | <b>8350</b>        |

Aritmetik  
ortalama=65

$$S = \sqrt{\frac{\sum f * (x - \bar{x})^2}{N - 1}}$$

$$S = \sqrt{\frac{8350}{45 - 1}} = 13,77$$

# Başka Bir Örnek

| Öğrenci | Puan |
|---------|------|
| Tolga   | 70   |
| Veli    | 66   |
| Gökhan  | 74   |
| Olca    | 90   |
| Oğuzhan | 90   |

Bu verideki puanların standart sapması kaçtır?

Aritmetik  
ortalama=78

# Başka Bir Örnek

| Öğrenci | Puan | Farklar | Farklar | Farkların Karesi  |
|---------|------|---------|---------|-------------------|
| Tolga   | 70   | 70-78   | -8      | 64                |
| Veli    | 66   | 66-78   | -12     | 144               |
| Gökhan  | 74   | 74-78   | -4      | 16                |
| Olca    | 90   | 90-78   | 12      | 144               |
| Oğuzhan | 90   | 90-78   | 12      | 144               |
|         |      |         |         | <b>Toplam=512</b> |

Aritmetik  
ortalama=78

$$S = \sqrt{\frac{512}{5-1}} = 11.31$$



# Sıra Sizde:)

| Öğrenci | Puan |
|---------|------|
| Serkan  | 20   |
| Ebru    | 20   |
| Deniz   | 40   |
| Ahmet   | 40   |
| Tuba    | 80   |

Tablodaki verilerin aritmetik ortalaması ve standart sapmasını hesaplayınız.

Cevap: A.ORT=40; SS=24,4949

# Standart Sapmanın Yorumlanması

- ▶ Standart sapma, ölçme sonuçlarının yayılımıyla ilgili bir istatistiktir.
- ▶ Puanların yayılımının genişliğiyle doğru orantılı olarak büyür.
- ▶ St. Sapma ne kadar büyük olursa puanların yayılımı da o kadar geniş olur. Bu durum ölçülen özellik açısından grubun heterojen (farklı) yapıya sahip olduğunu gösterir.

# Standart Sapmanın Yorumlanması

- ▶ Standart sapma arttıkça testin ayırt ediciliği artar.
- ▶ Standart sapma arttıkça testin güvenilirliği artar.
- ▶ Standart sapma tek başına başarıyı yorumlamak için kullanılamaz. Aritmetik ortalama ile beraber kullanıldığında grup başarısı hakkında bilgi verir.
- ▶ Standart sapma yüksek ise sınıfın başarısı düşük demektir.
- ▶ *Eğer iki grubun aritmetik ortalaması eşit ise, standart sapması küçük olan grup daha başarılıdır.*

# Varyans

- ▶ Bir veri grubunda ölçme sonuçlarının aritmetik ortalamadan farklarının karelerinin aritmetik ortalamasına varyans denir.
- ▶ Yani kısaca standart sapmanın karesine varyans denir:)
- ▶ **Varyans = (standart sapma)<sup>2</sup>**
- ▶ Örneğin standart sapması 10 olan bir verinin varyansı 10x10 dan 100 olarak bulunur. Açık formülü:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n - 1}$$

$S^2$  :Örnekleme hesaplanmış varyans

$\bar{X}$  :Örneklemin aritmetik ortalaması

$(X_i - \bar{X})$  :Her ölçümün aritmetik ortalamadan olan farkı

$n$  :Veri sayısı

# Varyans

- ▶ Varyans, dağılımdaki tüm ölçme sonuçlarına ilişkin bir yayılım ölçüsü olduğundan ranjdan, aritmetik ve cebirsel işlemlere olanak verdiği için dolayı da ortalama kaymadan daha iyi bir değişkenlik ölçüsüdür.
- ▶ Daha önce bahsettiğimiz gibi varyans standart sapmanın karesi olarak da tanımlanabilir. Standart sapma hesaplanırken ölçme sonuçlarının orijinal birimi cinsinden ifade edildiği için standart sapma, varyanstan daha kullanışlıdır. Yani varyans kullanıldığı zaman cm ile ölçülen uzunluklarda varyans  $\text{cm} \times \text{cm}$  kullanıldığı için  $\text{cm}^2$  çıkacaktır. Bu sebeple birimi değişir.

# Bağıl Değişkenlik Katsayısı

- ▶ Aritmetik ortalama ve standart sapma değeri kullanılarak hesaplanır.
- ▶ Bağıl değişkenlik katsayısı (**V**) puan dağılımının farklılığını daha doğru yorumlamamızı sağlayan başka dağılım ölçüsüdür.
- ▶ Bağıl değişkenlik katsayısı aritmetik ortalamanın (**A.O.**) 100 olduğu bir durumda standart sapmanın (**St. Sp.**) aldığı değerdir.
- ▶  **$V = (St.Sp./A.O.) \times 100$**
- ▶ 20–25 arası değer dağılımın normal olduğunu,
- ▶ 20'den küçük değer dağılımın homojen olduğunu,
- ▶ 25ten büyük değerler dağılımın heterojen olduğunu gösterir.

# Normal Dağılım

- ▶ Eğitimde ve psikolojide üzerinde çalışılan değişkenlerin çoğu, evrende normal dağılıma sahiptir.
- ▶ Normal olasılık dağılımı sürekli bir dağılımdır. Sürekli değişkenlerin hemen hemen tamamı normal bir dağılım gösterir. Hatta kesikli değişkenlerin dağılımı da örneklemdeki eleman sayısı arttıkça normale yaklaşır.



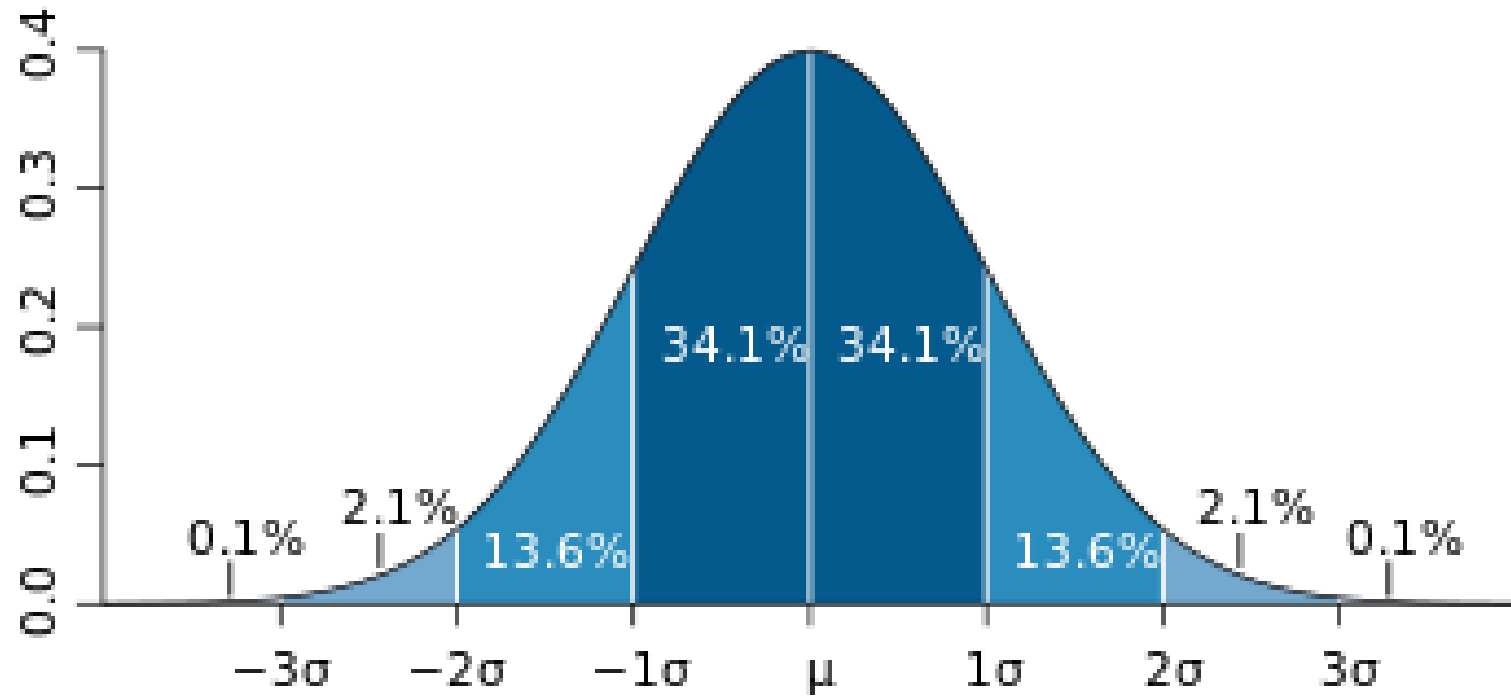


# Normal Dağılımın Özellikleri

- ▶ Çan biçiminde sağ ve sol alanları birbirine eşit simetrik bir eğridir.
- ▶ Normal dağılımda tepe değer (mod), medyan ve aritmetik ortalama değerleri birbirine eşit ve dağılımın tam orta noktasındadır.
- ▶ Orta kısımdan sağa ve sola, her iki yöne doğru gidildikçe, yığılmalar önce yavaş yavaş, sonra da hızlıca düşerek iki uçta uzun bir kuyruk oluşturur.
- ▶ Normal dağılım eğrisinin temel çizgisi, standart sapma birimleriyle bölünmüştür. Bu çizgi üzerinde aritmetik ortalamanın bulunduğu noktaya sıfır değeri verilir ve çizgi bu noktanın sağına  $+1SS$ ,  $+2SS$ ,  $+3SS$ , soluna ise  $-1SS$ ,  $-2SS$ ,  $-3SS$  olmak üzere standart sapma birimi kullanarak alanlara ayrılır.

▶ *SS: STANDART SAPMA*

# Standart Normal Dağılım



Normal dağılımda ölçümlerin yaklaşık,  
%68,26'sı  $X \pm 1SS$   
%95,44'ü  $X \pm 2SS$   
%99,74'ü  $X \pm 3SS$  alanı içine düşer.

# Standart Puanlar

- ▶ İki veya daha fazla dağılımı birbiriyle karşılaştırabilmek için, dağılımlara ait merkezi eğilim ve dağılım ölçüsünün bilinmesi gereklidir.
- ▶ Farklı dağılımlara sahip iki bireye ilişkin ölçme sonucunu, sadece ölçme sonuçlarına bakarak birbiriyle karşılaştırmak için, dağılımların merkezi eğilim ve dağılım ölçüsünün aynı olması gerekir.
- ▶ Fakat çoğu zaman farklı dağılımlarda bu iki ölçünün aynı olması mümkün olmaz.
- ▶ Eğer iki dağılımın ortalaması ve standart sapması farklıysa, bu dağılımların aynı standart sapma ve ortalamaya sahip bir dağılıma, yani birim normal dağılıma (standart normal dağılıma) dönüştürülmesi gerekir.
- ▶ Böylece farklı dağılımlardaki ölçme sonuçları aynı ölçek üzerinde görülebilir.
- ▶ Bu sayede farklı dağılımlardaki ölçme sonuçlarını karşılaştırmak mümkün olabilir.
- ▶ Bu işleme puanların standartlaştırılması da diyebiliriz.

# Hangi durumlarda Standart Puan Kullanılır?

- ▶ Bir öğrencinin grup içindeki başarısı hakkında yorum yapmak istendiğinde kullanılır.
- ▶ Puanlara göre karşılaştırma yapmak istendiğinde kullanılır.
- ▶ Öğrencinin farklı derslerden aldığı puanlara göre hangi dersten daha başarılı olduğunu söylemek için kullanılır.
- ▶ Farklı sınıflarda uygulanan testlerden öğrencilerin aldıkları puanları karşılaştırmak amacıyla kullanılır.

# Standart Puanlar: Z puanı

- ▶ Ölçme sonuçları Z puanına dönüştürülerek, aritmetik ortalaması 0 ve standart sapması 1 olacak biçimde normal dağılımlı hale getirilir.
- ▶ Z puanı ile elde edilen aritmetik ortalaması 0 ve standart sapması 1 olan bu dağılıma standart normal dağılım ya da birim normal dağılım denir.

$$Z = \frac{X_i - \bar{X}}{S_X}$$

Z : Bir öğrencinin standart Z puanı

X : Öğrencinin ölçme sonucu (puan)

$\bar{X}$  : Grubun aritmetik ortalaması

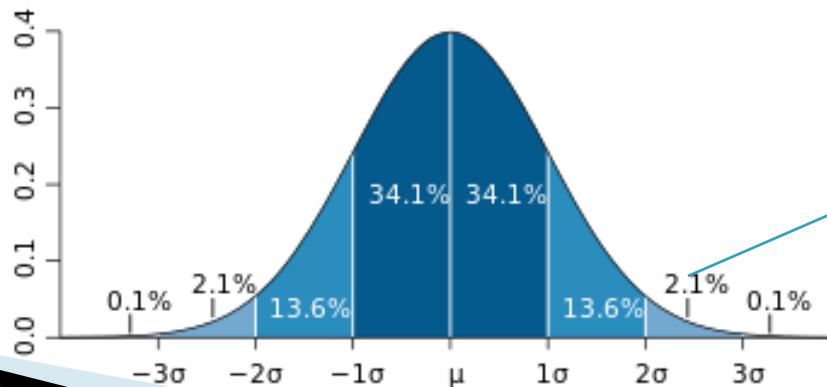
$S_X$  : Grubun standart sapması

# Z Puanı Örnek

- 50 öğrencinin 100 soruluk bir testten aldıkları puanların aritmetik ortalaması 50, standart sapması ise 15'tir. Bu durumda 80 puan alan öğrencinin Z puanını hesaplayalım.

$$Z = \frac{80 - 50}{15} = 2$$

Bulduğumuz bu Z puanına dayalı olarak, öğrencinin grup içerisindeki başarısı hakkında yorum yapılabilir:



Z puanı 2 olarak bulunan bu öğrenci, tüm grubun yaklaşık olarak %98'inden daha yüksek başarıya sahiptir ve grubun %2'sinden daha düşük başarıya sahiptir.

# Z puanının Yorumlanması

- ▶ Z puanı simetrik bir dağılımdır. Bu nedenle ortalama olan 0'ın sağındaki ve solundaki alan eşittir ve her ikisi de %50'yi gösterir. Bu nedenle Z puanı 0 olan bir öğrenci; sınıfın %50'sinden daha başarılı diğer %50'sinden daha düşüktür.
- ▶ Z puanı -2 olan bir öğrenci; grubun yaklaşık olarak %2'sinden başarılı, %98'inden daha düşük başarıya sahiptir. Z puanı +2 olan öğrenci ise, grubun %98'inden daha başarılı ve %2'sinden daha düşük başarıya sahiptir.
- ▶ Z puanı -1 olan bir öğrenci; grubun yaklaşık olarak %16'sından başarılı, %84'ünden daha az başarılıdır. Z puanı +1 olan bir öğrenci ise; grubun yaklaşık olarak %84'ünden başarılı, %16'sından daha az başarılıdır.

# Z puanı Örnek

- Bir sınıfta 4 ayrı test kullanılmıştır. Her bir testten elde edilen puanların sınıf ortalaması, standart sapması ve bir öğrencinin bu testlerden aldıkları puanlar şöyledir.

|                    | Test1 | Test2 | Test3 | Test4 |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|
| Öğrenci Puanı      | 65    | 65    | 75    | 70    |
| Aritmetik Ortalama | 50    | 50    | 50    | 40    |
| Standart Sapma     | 6     | 10    | 25    | 10    |

**Bu durumda öğrenci hangi testte daha başarılıdır?**

***İpucu:** Z puanlar hesaplanır. En yüksek Z puanı bir öğrencinin en başarılı olduğu dersi en düşük Z puanı da bir öğrencinin en başarısız olduğu dersi gösterir.*



# Standart Puanlar: T puanı

- ▶ T puanı Z puanının Özel bir halidir.
- ▶ Z puan dağılımı; aritmetik ortalaması 50 ve standart sapması 10 olacak şekilde T puanına dönüştürülür.
- ▶ Yani T puanı aritmetik ortalaması 50 ve standart sapması 10 olan bir standart puan dağılımıdır.
- ▶ T puanı da Z puanı gibi yorumlanır.

$$T = 50 + \left( \frac{X - \bar{X}}{S} \right) 10$$

| Z puanı | -3 | -2 | -1 | 0  | 1  | 2  | 3  |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|
| T puanı | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 |

# Örnek

Formülümüz:  $T \text{ puanı} = 50 + 10 \times Z$

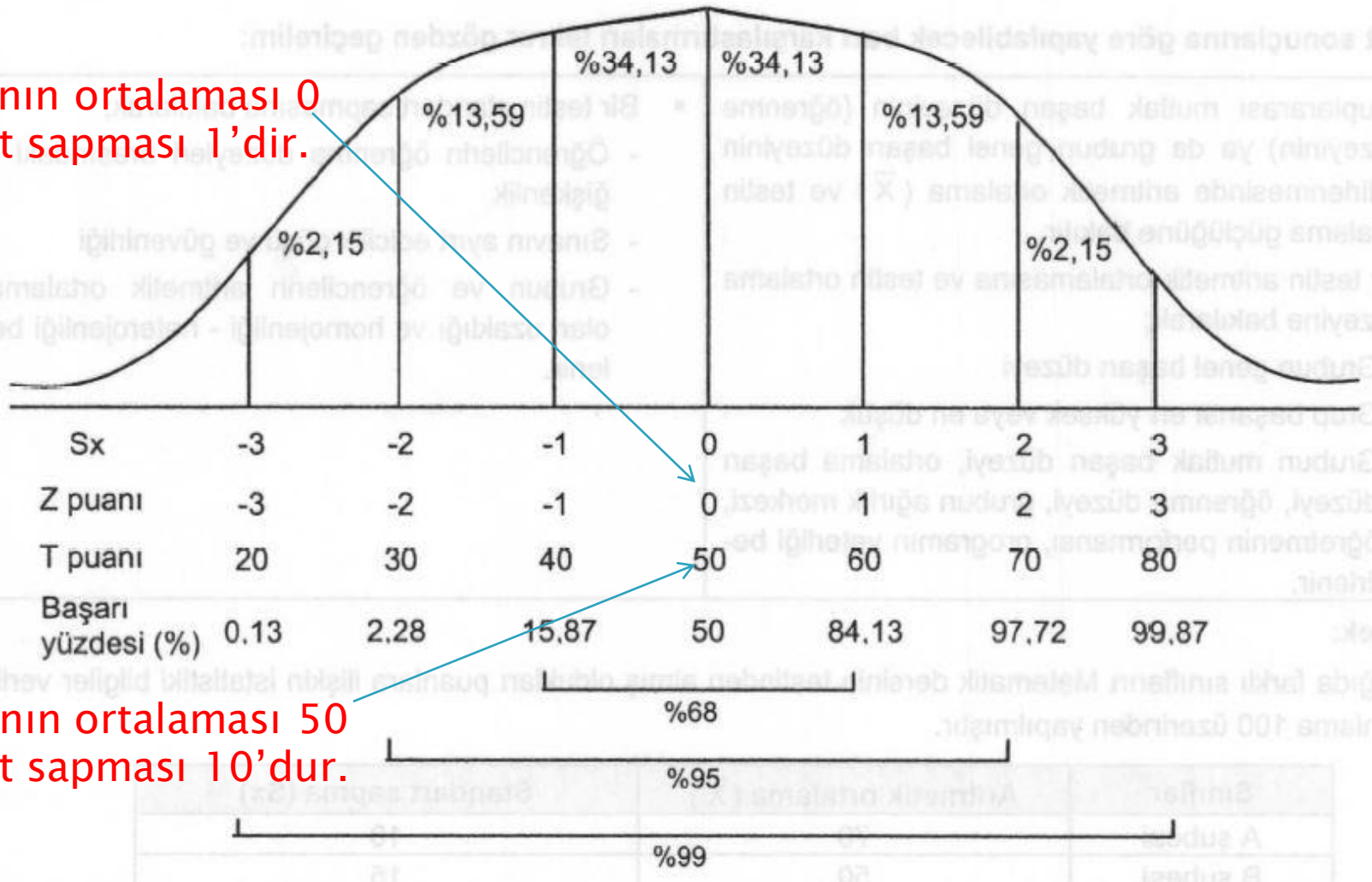
|                | Matematik | Fizik |
|----------------|-----------|-------|
| Öğrenci Puanı  | 50        | 60    |
| Ortalama       | 50        | 50    |
| Standart Sapma | 10        | 10    |

Z puanları:  $(50-50)/10=0$  ve  $(60-50)/10=1$   
bulunur.

T puanları:  $50+(10*0)=50$  ve  $50+(10*1)=60$   
bulunur.

# Z ve T Puan dağılımları

Z puanının ortalaması 0  
standart sapması 1'dir.



T puanının ortalaması 50  
standart sapması 10'dur.