

MERKEZİ EĞİLİM ÖLÇÜLERİ

3.SUNUM

Basit İstatistiksel İşlemler

Genel olarak test istatistikleri

- ▶ Merkezi Eğilim (Yığılma) Ölçüleri
- ▶ Merkezi Dağılım (Yayılma) Ölçüleri

olmak üzere 2 grupta incelenebilir.

Merkezi Eğilim (Yığılma) Ölçüleri

- ▶ Merkezi Eğilim Ölçüleri, belli bir özelliğe ya da değişkene ilişkin ölçme sonuçlarının, *hangi değer etrafında toplandığını* gösteren ve veri grubunu özetleyen ölçülerdir.

Merkezi eğilim ölçüleri:

- ▶ Mod (Tepe Değeri)
- ▶ Medyan (Ortanca)
- ▶ Aritmetik Ortalama
- ▶ Ağırlıklı Ortalama
- ▶ Kareli Ortalama

Mod (Tepe Değer)

- ▶ Bir veri grubunda en çok tekrar eden ölçme sonucuna (puana) mod denir. Yani en fazla frekansa sahip değer olarak tanımlanır.
- ▶ Mod, verilerin en çok tekrar eden değer etrafında toplandığını ifade eden bir ölçüdür. Veri grubunu betimlemede, tüm verilerden ziyade en çok tekrar eden verinin kullanılmasından dolayı mod, diğer merkezi eğilim ölçülerine kıyasla veri hakkında en az bilgi veren ölçüdür.
- ▶ Hiçbir aritmetik işlem gerektirmez.
- ▶ Örnek:
- ▶ 1, 2, 7, 5, 6, 4, 4, 4, 3, 2, 1, 7, 8, 10, 9, 2, 2, 4, 4
- ▶ Bu verideki sayılar arasında 4 sayısı en çok tekrarlanan (5 defa) sayıdır. Dolayısıyla bu verinin $\text{modu}=4$ 'tür.

Mod (Tepe Değer)

- ▶ Bazı durumlarda, en yüksek frekansa sahip değer iki veya daha fazla sayıda olabilir. Bu durumda dağılımın tek tepe değeri olmaz. Dağılım iki veya daha fazla tepe değere sahiptir.
- ▶ Öğrencilerin matematik sınavından aldığı puanlar:
- ▶ 45, 55, 50, 60, 60, 60, 45, 35, 45, 75 ve 50 olsun.
- ▶ 45 ve 60 puanlarının her ikisi de aynı ve en yüksek frekansa sahiptir. Bu durumda dağılım tek değil çift tepe değerlidir.

Mod (Tepe Değer)

- ▶ Bir dağılımın birden fazla tepe değere sahip olması verilerin hangi değer etrafında yığıldığı hakkında sağlıklı bilgi vermez. Grubun homojen değil heterojen bir yapıya sahip olduğunu gösterir.
- ▶ Bazı durumlarda da verideki değerlerin hepsi aynı sayıda gözlenir. Bu durumda tepe değer yoktur denilir.
- ▶ 50, 60,70, 80 verisinde tepe değer yoktur.
- ▶ Önceki slaytlarda vermiş olduğumuz verinin modu 93'tür

Tepe Değerin Özellikleri

- ▶ Tepe değer bulunurken sadece en çok tekrarlayan ölçme sonucu alındığından tepe değer kaba ve kullanışsızdır.
- ▶ Hesaplaması çok kolaydır.
- ▶ Nitel veriler ve sınıflama düzeyindeki ölçme sonuçları üzerinde uygulanabilecek tek merkezi eğilim ölçüsüdür.
- ▶ Veri grubundaki en ufak değişiklik tepe değer beklenmedik şekilde değişmesine yol açtığı için tepe değer küçük değişikliklere duyarlıdır ve bu yüzden kullanışsızdır.

Frekans Tablosunda Mod

Puan	Frekans
50	11
60	12
70	19
80	15
90	16

- Frekans tablosunda mod değerini bulmak için frekans değeri en yüksek olan puana bakarız. Frekans değeri en yüksek olan yani en çok tekrar eden puan mod olarak alınır. Yandaki tabloda mod değeri 70'tir.

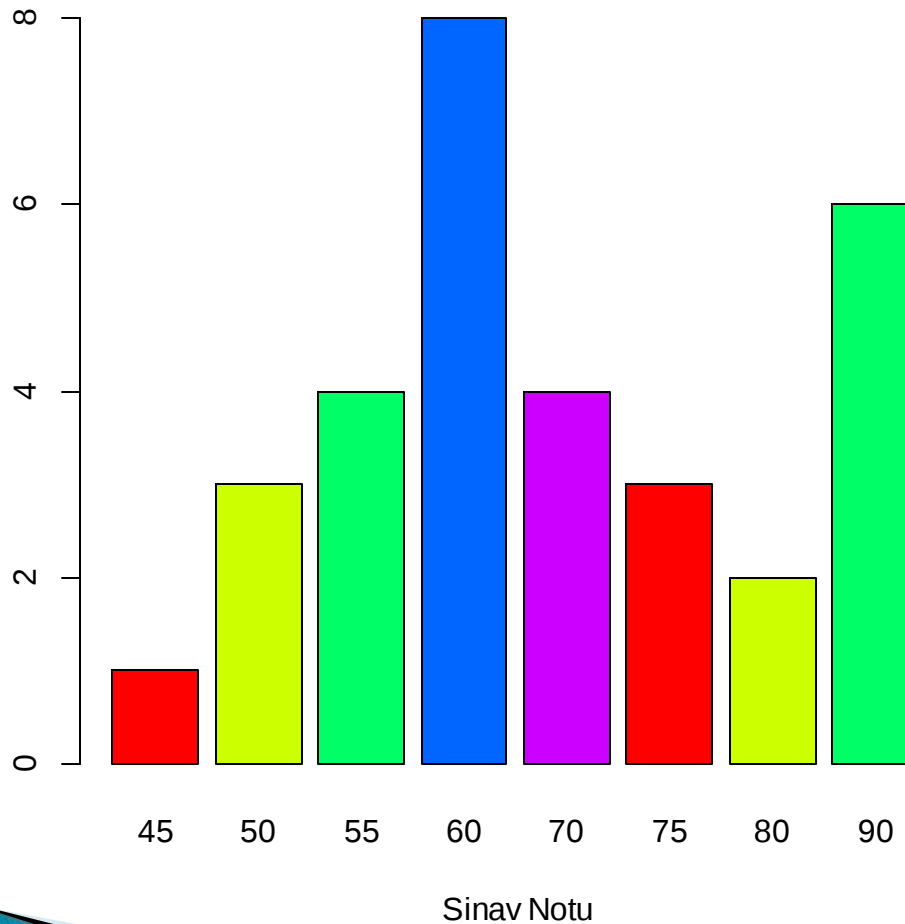
Gruplandırılmış Verilerde Mod

PUAN ARALIĞI (X)	Frekans (f)
90-98	5
81-89	6
72-80	7
63-71	6
54-62	5
45-53	4

Gruplandırılmış verilerde modu bulmak için frekansı en yüksek olan puan aralığına bakılır ve bu puan aralığının ortancası verinin modu olarak alınır.

Yukarıdaki tabloda verilen verinin modu 72-80 puan aralığının en orta noktasında bulunan **76**'dır

Grafiklerde Mod

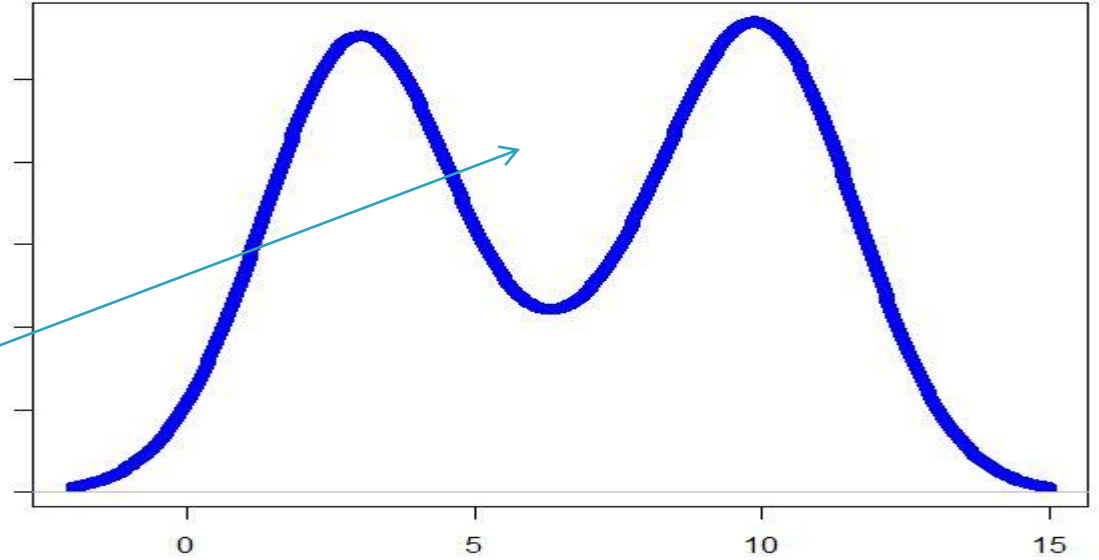


- Yandaki grafikte en çok alınan sınav puanı kaçtır? Yani bu sınıfın modu kaçtır?

Örnek 1

Puan	Frekans
3	10
7	2
10	10

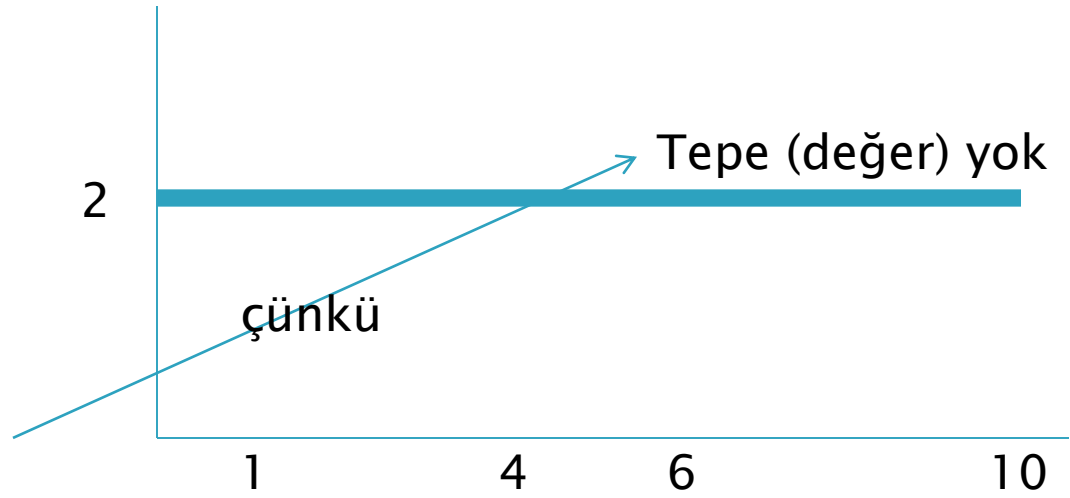
Çift modlu



Örnek 2

Puan	Frekans
10	2
6	2
1	2
4	2

Mod hesaplanamaz



Tepedeğer Örnek

Puanlar	Frekans
98	4
94	8
90	6
86	7
82	5

Tepedeğer = ?

Tepedeğer = ?

Puanlar	Frekans
92	3
91	5
90	9
89	7
88	15

Ortanca (Medyan)

- ▶ Sıralanmış bir veri grubunu tam ortadan ikiye ayıran noktaya rastlayan ölçme sonucuna **ortanca** denir.
- ▶ Ortancanın sırası (yeri) gruplandırılmış ve sıralanmış verilerde $(N+1)/2$ formülüyle hesaplanır. Bulunan sayı ortancanın en düşük sayıdan uzaklığını verir.

Veri sayısının **tek** olması durumunda:

- ▶ 1, 4, 5, **6**, 7, 8, 11 şeklinde sıralı halde verilmiş olan puan dağılımının ortancası, $(7+1)/2=4$ yani 4. sıradaki sayıdır. Bu puanların tam orta noktasına rastlayan ölçme sonucu olan 6'dır.

Veri sayısının **çift** olması durumunda:

- ▶ 11, 12, 13, 13, 16, **17, 18**, 19, 21, 22, 23, 24 şeklinde sıralı halde verilmiş olan puan dağılımının ortancası en ortadaki iki sayının ortalamasıdır $(17+18)/2 = 17.5$ 'tir.
- ▶ Önceki slaytlarda vermiş olduğumuz verinin ortancası 85'tir.

Ortanca

1, 4, 5, 6, 7, 8, 11



11, 12, 13, 13, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24



Ortanca sıralanmış veriyi tam ortadan ikiye bölen sayı(lar) ile bulunur.

Aritmetik Ortalama $\bar{X}$

- ▶ En çok kullanılan merkezi yığılma ölçüsüdür.
- ▶ Aritmetik ortalama, verideki puanların toplamının verideki eleman sayısına bölünmesiyle bulunur.

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_N}{N}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

$\bar{X}$: Aritmetik Ortalama

$\sum X$: Verilerin Toplamı

N : Veri sayısı

Aritmetik Ortalama Örnek

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots X_N}{N}$$

10, 20, 30, 30, 40 dağılımına sahip olan bir veri için aritmetik ortalama hesaplaması aşağıdaki gibidir.

$$\bar{X} = \frac{10 + 20 + 30 + 30 + 40}{5} = 26$$

Önceki slaytlarda vermiş olduğumuz 39 kişilik verinin ortalaması 81.33'tür.

Frekans Tablosunda Aritm. Ortalama

X	f
60	1
59	3
57	1
56	3
55	1
54	4
53	2
52	2
51	2
50	1
49	3
48	2
47	2
46	1

Yandaki tabloda verilen
ve 46 ile 60 arasında
değişen puanların
aritmetik ortalaması
kaçtır?

Frekans Tablosunda Aritm. Ortalama

X	f	fX
60	1	60
59	3	177
57	1	57
56	3	168
55	1	55
54	4	216
53	2	106
52	2	104
51	2	102
50	1	50
49	3	147
48	2	96
47	2	94
46	1	46

İlk önce hangi puandan kaç tane varsa puanın değeri ile yanındaki frekansı çarparak (fx) toplam puan değerlerini bulmaya çalışırız.

Frekans Tablosunda Aritm. Ortalama

X	f	fX
60	1	60
59	3	177
57	1	57
56	3	168
55	1	55
54	4	216
53	2	106
52	2	104
51	2	102
50	1	50
49	3	147
48	2	96
47	2	94
46	1	46
Toplam	28	1478

$$\bar{X} = \frac{1478}{28} = 52.78$$

Gruplandırılmış Verilerde Aritmetik Ortalama

X	f
35-39	3
40-44	5
45-49	8
50-54	11
55-59	8
60-64	5
65-69	5

Yandaki tabloda verilen
gruplandırılmış verinin
aritmetik ortalaması
kaçtır?

Gruplandırılmış Verilerde Aritmetik Ortalama

X	f	X_o	$f * X_o$
35-39	3	37	111
40-44	5	42	210
45-49	8	47	376
50-54	11	52	572
55-59	8	57	456
60-64	5	62	310
65-69	5	67	335
Toplam	45		2370

Burada her bir puan grubu için o grubu temsil eden **ortanca (X_o)** değeri alınır ve frekans ile çarpılır. Örneğin 35-49 puan aralığı için ortanca değer 37 olduğu için ve bu puan aralığında puan alan 3 öğrenci olduğu için 37'yi 3 ile çarparız.

$$\bar{X} = \frac{2370}{45} = 52.66$$

Gruplandırılmış Verilerde Aritmetik Ortalama

- ▶ Frekans serisinden farkı gözlem değerleri ayrı ayrı bilinmediğinden, diğer bir ifadeyle sadece ilgili gözlemin yer aldığı sınıf aralığı bilindiğinden, elde edilen ortalama, gerçek anakütle ya da örneklem aritmetik ortalamasına bir *yaklaşım* olacaktır.

Ağırlıklı Ortalama

- ▶ Birden çok veri kümesinin bulunduğu durumlarda, bunların farklı katsayılarla ağırlıklandırılması gerekir.
- ▶ Örneğin, bir yarıyılıda herhangi bir dersten yapılan ölçme işlemlerinin farklı katsayılarla çarpıldıktan sonra ortalamalarının hesaplanması gerekir. Bu şekilde hesaplanan ortalama ağırlıklı ortalama denir.

$$\bar{X} = \frac{a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + \cdots a_nX_N}{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N}$$

$\bar{X}$: Ağırlıklı Ortalama

a_nX_N : Her bir verinin kendi ağırlıklandırma katsayısı ile çarpımının toplamı

a_N : Ağırlıklandırma katsayısı toplamı

Ağırlıklı Ortalama Örnek

- ▶ Örneğin, ikinci yarıyılıda aldığı fizik dersindeki yazılı, sözlü ve ödev notları sırasıyla 7, 9, 8 olan bir öğrencinin fizik dersi ağırlıklı not ortalaması, yazılı, sözlü ve ödev notlarına verilmek istenen ağırlığa bağlıdır.
- ▶ Sırasıyla bu notlara verilmek istenen ağırlık %50, %30 ve %20 şeklinde belirlenmişse, o derse ilişkin öğrencinin ağırlıklı not ortalaması şu şekilde hesaplanır:

$$\bar{X} = \frac{50 * 7 + 30 * 9 + 20 * 8}{50 + 30 + 20} = 7.8$$

Ağırlıklı Ortalama Örnek

Ders	Kredi	Not
Fizik	3	4
Kimya	3	4
Biyoloji	3	5
Matematik	3	5
Resim	1	5
Müzik	1	5
Beden Eğitimi	1	4
Türkçe	3	3

Yan tarafta bir öğrencinin farklı kredilere sahip derslerden aldıkları notlar verilmiştir. Bu derslerin ağırlıklı ortalaması kaçtır?

Ağırlıklı Ortalama Örnek

Ders	Kredi	Not	Puan*Kredi
Fizik	3	4	12
Kimya	3	4	12
Biyoloji	3	5	15
Matematik	3	5	15
Resim	1	5	5
Müzik	1	5	5
Beden Eğitimi	1	4	4
Türkçe	3	3	9
Toplam	18	35	77

Ağırlıklı ortalama=77/18= 4.28

Kareli Ortalama

- ▶ Seriyi oluşturan gözlem değerlerinin karelerinin toplamının gözlem sayısına oranının karekökü kareli ortalamayı verir. Bir başka ifadeyle gözlem değerlerinin karelerinin aritmetik ortalamasının karekökü kareli ortalama olarak adlandırılır.

Kareli Ortalama

Basit serilerde kareli ortalama anakütle için

$$K = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N}}$$

formülüyle hesaplanırken örneklem için aşağıdaki formül kullanılır:

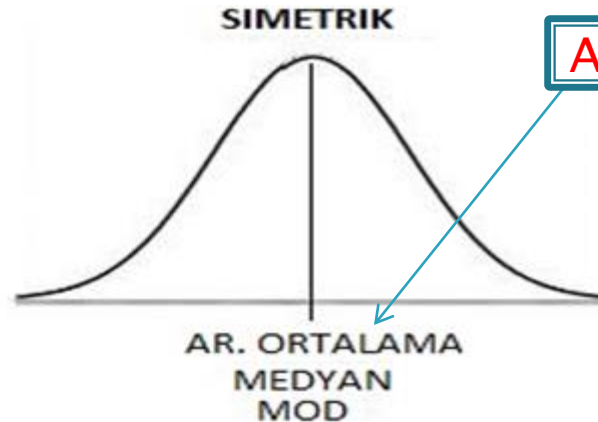
$$K = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}$$

Kareli Ortalama

x	x*x
2	4
4	16
6	36
8	64
10	100
	Toplam=220

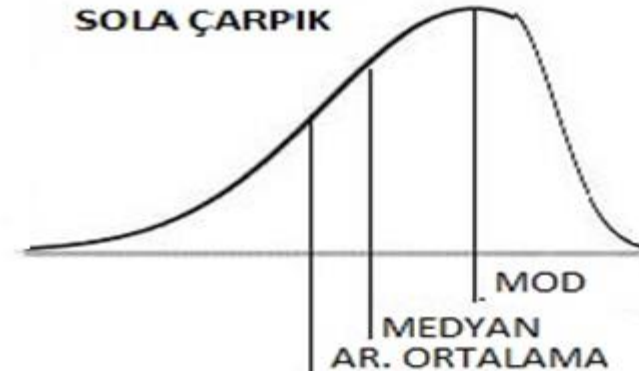
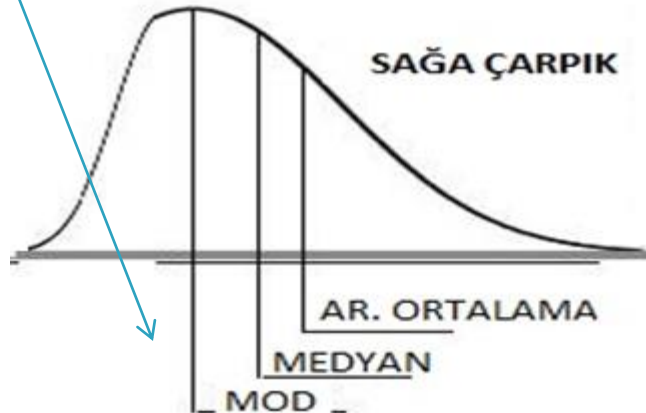
$$K = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{220}{5}} = \sqrt{44} = 6,63$$

Karşıımıza Çıkabilecek 3 Tipik Dağılım (mod-medyan-ortalama durumlarına göre)



Ar. Ortalama=Medyan=Mod

Ar. Ortalama>Medyan>Mod



Ar. Ortalama < Medyan < Mod

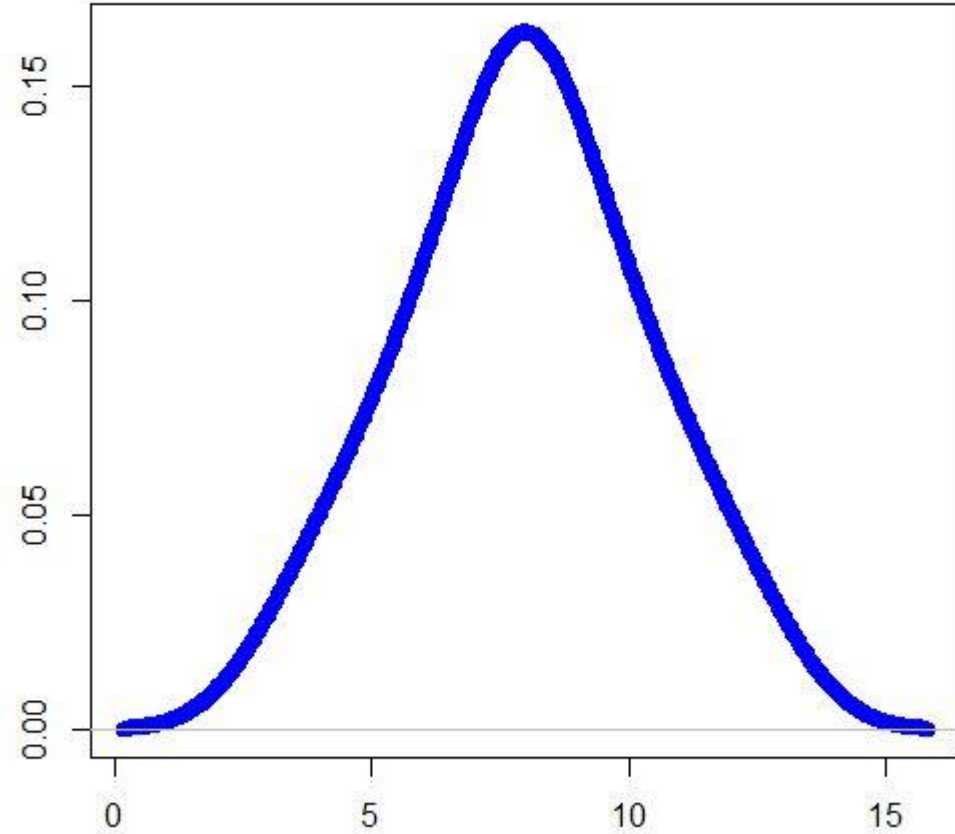
Örnek 3

Puan	Frekans
4	1
6	2
8	4
10	2
12	1

Aritmetik ortalama= ?

Medyan= ?

Mod=?

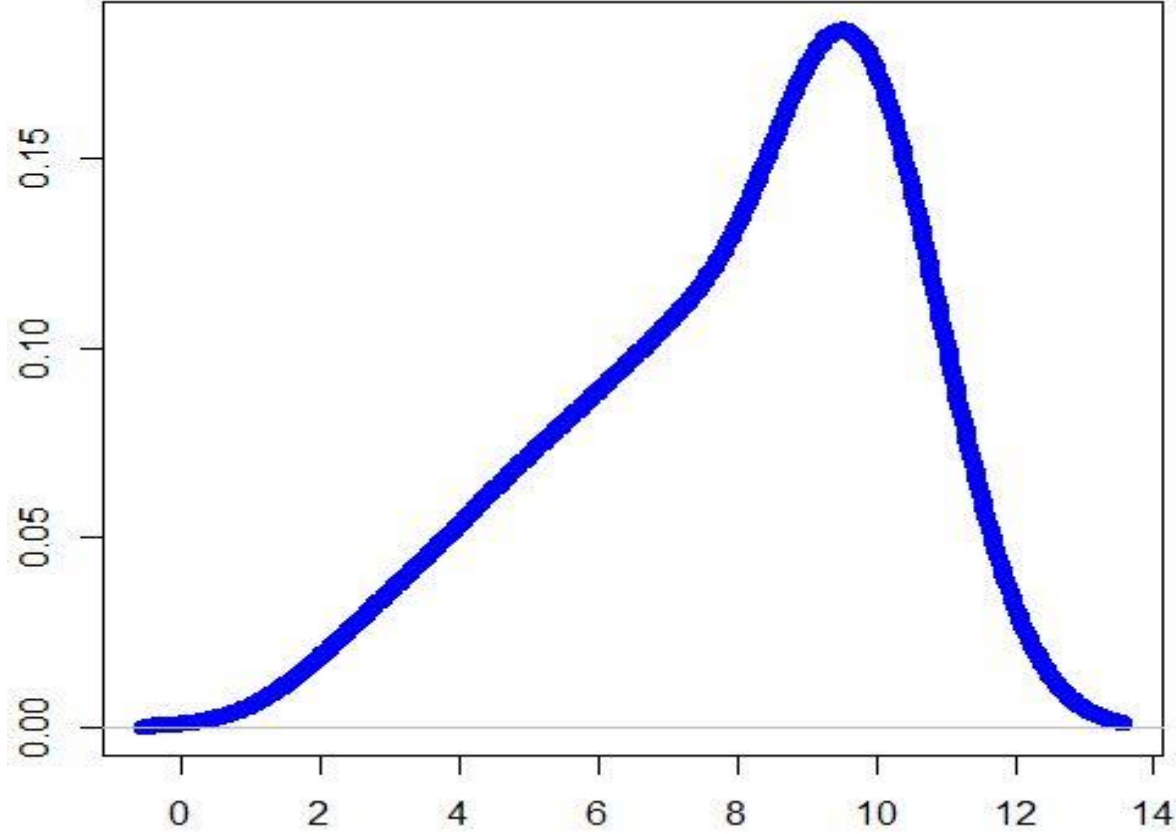


Normal Dağılım

Örnek 4

Puan	Frekans
3	1
5	2
7	3
9	4
10	5

Aritmetik ortalama=?
Medyan=?
Mod=?



Sola Çarpık

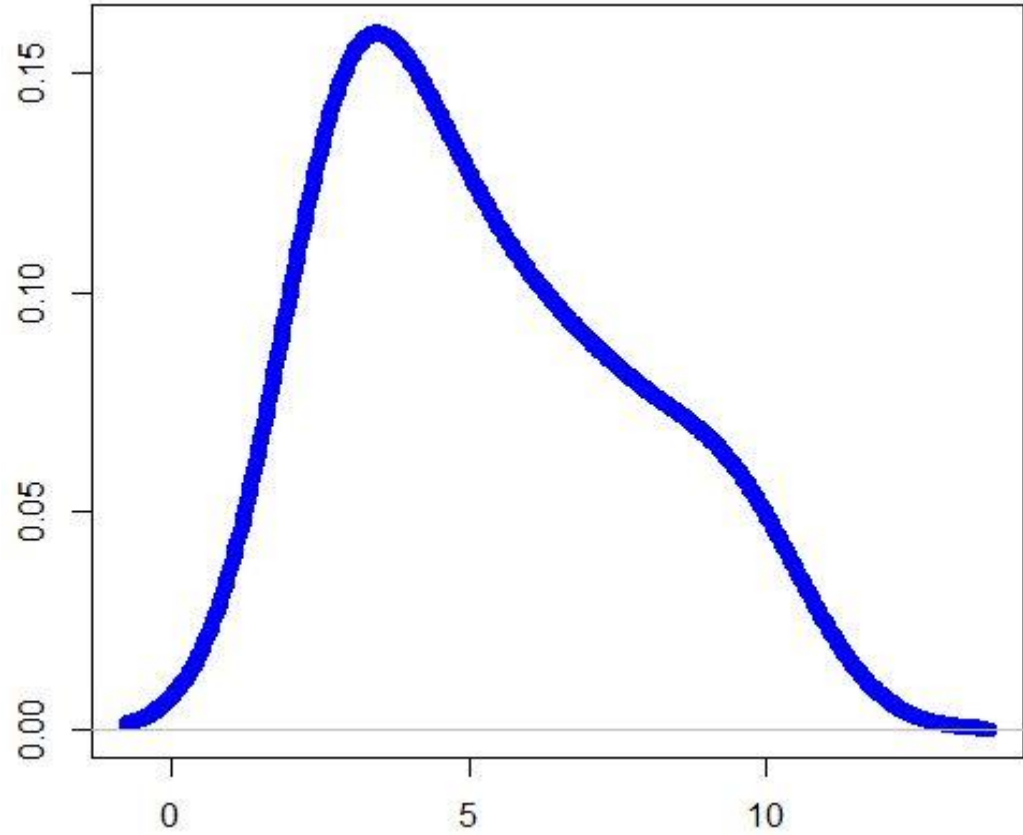
Örnek 5

Puan	Frekans
3	7
5	4
7	3
9	2
10	1

Aritmetik ortalama= ?

Medyan= ?

Mod=?



Sağa Çarpık